

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Πιθανότητες» (EM161) – Εαρινό Εξάμηνο 2004-2005
Διδάσκων Ι. Τσαγράκης

12^ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των X και Y δίνεται ως

$$f(x,y) = \begin{cases} c(y-x)e^{-y}, & \text{για } -y \leq x \leq y, \text{ και } 0 < y < \infty \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- α) Βρείτε το c , β) Βρείτε τις περιθώριες πυκνότητες των X και Y ,
γ) Βρείτε τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της X δεδομένου ότι $Y = y$

Άσκηση 2: Αν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν από κοινού πυκνότητα f η οποία είναι ομοιόμορφη στο εσωτερικό του τετραγώνου που έχει κέντρο στο $(0, 0)$ και πλευρές μήκους 2.

- α) Βρείτε την f , β) Βρείτε την $P(X^2 + Y^2 \leq 1)$,
γ) Δείξτε ότι οι X και Y είναι ανεξάρτητες και καθεμιά είναι ομοιόμορφη στο $(-1, 1)$,
δ) Βρείτε την $P(X < \frac{1}{2}, Y < 0)$

Άσκηση 3: Έστω ότι η X είναι ομοιόμορφη στο $(0, 1)$ και η Y εκθετική με παράμετρο $\lambda = 1$. Αν X και Y είναι ανεξάρτητες, βρείτε την πυκνότητα της Z , όπου: α) $Z = X + Y$, β) $Z = X/Y$

Άσκηση 4: Αν X, Y είναι ανεξάρτητες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας f . Δώστε έναν τύπο για την πυκνότητα της $Z = X - Y$.

Άσκηση 5: Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των X και Y δίνεται ως $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{x^3 y^2}, & \text{για } x \geq 1 \text{ και } y \geq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$.

- α) Βρείτε τη δεσμευμένη πυκνότητα της X δεδομένου ότι $Y = y$.
β) Βρείτε τη δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}[X \mid Y = y]$.

Άσκηση 6: Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των X και Y είναι η $f(x,y) = \begin{cases} e^{-y}/y, & \text{για } 0 < x < y \text{ και } y > 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$.

Βρείτε την $\mathbb{E}[X^3 \mid Y = y]$.

Άσκηση 7: Αν X, Y είναι ανεξάρτητες και έχουν κανονική πυκνότητα $N(0,1)$, βρείτε την $P(X^2 + Y^2 \leq 1)$.

Άσκηση 8: Αν X, Y είναι ανεξάρτητες και έχουν εκθετική πυκνότητα με παράμετρο $\lambda = 1$, βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας καθεμιάς από τις μεταβλητές $Z = X/(X+Y)$, $V = XY$ και $W = X/Y$.

Άσκηση 9: Έστω ότι οι τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν από κοινού πυκνότητα f που είναι ομοιόμορφη στο μοναδιαίο δίσκο που έχει κέντρο στο $(0,0)$.

- α) Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής R όπου R είναι η απόσταση του σημείου (x,y) από το $(0,0)$.
β) Βρείτε τη μέση απόσταση του (x,y) από την αρχή των αξόνων.

Άσκηση 10: Λύστε την άσκηση 9 για την περίπτωση που οι X, Y είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την κανονική κατανομή $N(0,1)$.

Άσκηση 11: Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι που χρειάζονται δύο φοιτητές για να λύσουν ένα πρόβλημα είναι ανεξάρτητοι και ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ . Βρείτε την πιθανότητα ο πρώτος φοιτητής να χρειαστεί τουλάχιστον διπλάσιο χρόνο από τον δεύτερο για να λύσει το πρόβλημα.

Άσκηση 12: Δυο άνθρωποι συμφωνούν να συναντηθούν μεταξύ 2 μμ και 3 μμ χωρίς όμως αυτός που θα έρθει πρώτος να περιμένει τον άλλο περισσότερο από 15 λεπτά. Ποια η πιθανότητα να συναντηθούν;