**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**
Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

**«Πιθανότητες» (ΕΜ161) – Εαρινό Εξάμηνο 2004-2005**
Διδάσκων Ι. Τσαγράκης

***<u>11$^{O}$ ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ</u>***

**Άσκηση 1:** Η συνάρτηση σφάλματος $\mathrm{erf}(x)$ ορίζεται ως: $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2}\,\mathrm{d}\,y$, για $-\infty < x < \infty$. Εκφράστε την $\Phi(x)$ συναρτήσει της συνάρτησης σφάλματος.

**Άσκηση 2:** Μεγάλο πλήθος από ραδιενεργά σωματίδια έχουν χρόνους διάσπασης που ακολουθούν εκθετική κατανομή με κάποια παράμετρο $\lambda$. Αν τα μισά σωματίδια διασπώνται στη διάρκεια του πρώτου δευτερολέπτου, πόσος χρόνος θα χρειαστεί για τη διάσπαση του 75% των σωματιδίων;

**Άσκηση 3:**Αν η $X$ ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda$. Βρείτε τις συναρτήσεις πυκνότητας των τ.μ.:
α) $Y = e^X$, β) $Z = \ln X$, γ) $W = 1/(X+1)$, δ) $R = aX + b$ (με $a \neq 0$)
Βρείτε τις αντίστοιχες συναρτήσεις πυκνότητας αν η $X$ ακολουθεί: i) ομοιόμορφη κατανομή στο ($a$, $b$), ii) κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$, και iii) πυκνότητα Cauchy.

**Άσκηση 4:** α) Δείξτε ότι αν $\alpha > 1$, η πυκνότητα γάμμα $\Gamma(\alpha,\lambda)$ έχει μέγιστο στο $(\alpha-1)/\lambda$.
β) Αν η $X$ έχει την πυκνότητα $\Gamma(\alpha,\lambda)$, βρείτε την πυκνότητα της $Y = \sqrt{X}$.

**Άσκηση 5:**Αν η συνάρτηση κατανομής της $X$ είναι $F(x) = 1 - e^{-x^2/2}$, για $x > 0$ και $F(x) = 0$, για $x \leq 0$, βρείτε τα εξής: α) $\mathbb{E}X$, β) $\mathbb{E}(1/X)$.

**Άσκηση 6:** α) Έστω ότι η $X$ έχει την κανονική πυκνότητα $N(0,\sigma^2)$. Βρείτε την πυκνότητα, τη μέση τιμή και τη διασπορά καθεμίας από τις τυχαίες μεταβλητές: $Y = |X|$, $Z = X^2$ και $W = e^{Xt}$
β) Έστω ότι η $X$ έχει την κανονική πυκνότητα $N(\mu,\sigma^2)$. Βρείτε την πυκνότητα της, τη μέση τιμή και τη διασπορά της $Y = e^X$. *Σημείωση*: σε αυτήν την περίπτωση, η πυκνότητα της $Y$ λέγεται λογαριθμική πυκνότητα.

**Άσκηση 7:** Υποθέτουμε ότι το σημείο ($u$, $v$) επιλέγεται ομοιόμορφα από το τετράγωνο $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$. Έστω $X$ η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί τον αριθμό $u + v$ στο σημείο ($u$, $v$). Βρείτε τη συνάρτηση κατανομής και μια συνάρτηση πυκνότητας της $X$. Επίσης, υπολογίστε τις $\mathbb{E}X$ και $\mathrm{Var}\,X$.

**Άσκηση 8:** Έστω $g(x) = x(1-x)^2$ για $0 \leq x \leq 1$, και $g(x) = 0$ αλλιώς. Κανονικοποιήστε την $g$ ώστε να προκύψει μια συνάρτηση πυκνότητας $f$. Αν $X$ μια τ.μ. που έχει πυκνότητα $f$, υπολογίστε τις $\mathbb{E}X$ και $\mathrm{Var}\,X$.

**Άσκηση 9:** Υποθέτουμε ότι το βάρος ενός ατόμου που επιλέγεται τυχαία από έναν πληθυσμό ακολουθεί κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu$ και $\sigma$. Υποθέτουμε ακόμα ότι $P(X \leq 80) = 1/2$ και $P(X \leq 70) = 1/4$. Βρείτε τα $\mu$ και $\sigma$, καθώς και την $P(X \geq 100)$. Ποιο είναι το ποσοστό των ατόμων που ζυγίζουν τουλάχιστον 100 κιλά, των οποίων το βάρος υπερβαίνει τα 110 κιλά;

**Άσκηση 10:** Έστω $X$ το ημίτονο μιας γωνίας (σε ακτίνια) που επιλέγεται τυχαία από το $(-\pi/2, \pi/2)$. Βρείτε την πυκνότητα, τη συνάρτηση κατανομής, τη μέση τιμή και τη διασπορά της $X$.

**Άσκηση 11:** Έστω ότι η $X$ έχει την πυκνότητα γάμμα $\Gamma(\alpha,\lambda)$. Για ποιους πραγματικούς $t$ η $e^{tX}$ έχει πεπερασμένη μέση τιμή; Βρείτε την $\mathbb{E}e^{tX}$ γι' αυτές τις τιμές του $t$.