ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ (ΕΜ 161)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ 10ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Αφού η X έχει πυκνότητα Poisson με παράμετρο λ, θα ισχύει:
$\mu = EX = \lambda = \mathrm{Var}\,X = \sigma^2$, οπότε η ανισότητα του Chebyshev δίνει:

$$P(|X-\mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2} \Rightarrow P(|X-\lambda| \geq t) \leq \frac{\lambda}{t^2}, \quad \forall t>0$$

$$\Rightarrow P(X-\lambda \geq t \text{ ή } X-\lambda \leq -t) \leq \frac{\lambda}{t^2} \Rightarrow$$

$$\underset{\substack{\text{ξένα}\\ \text{για } t>0}}{\Rightarrow} P(X-\lambda \geq t) + P(X-\lambda \leq -t) \leq \frac{\lambda}{t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(X \geq \lambda+t) + P(X \leq \lambda-t) \leq \frac{\lambda}{t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(X \geq \lambda+t) \leq \lambda/t^2 & (1) \\ P(X \leq \lambda-t) \leq \lambda/t^2 & (2) \end{cases}$$

Για $t = \lambda/2$, η ανισότητα (2) δίνει: $P(X \leq \lambda/2) \leq 4/\lambda$
ενώ για $t=\lambda$, η ανισότητα (1) δίνει: $P(X \geq 2\lambda) \leq 1/\lambda$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Έστω η τυχαία μεταβλητή $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$. Τότε $EY = \sum_{i=1}^{100} EX_i = 100$
και $\mathrm{Var}\,Y = \sum_{i=1}^{100} \mathrm{Var}\,X_i$ (επειδή X_i ανεξάρτητες). Άρα $\mathrm{Var}\,Y = 100$

Επομένως, η ανισότητα του Chebyshev για $\mu = EY = 100$ και $\sigma^2 = \text{Var}\,Y = 100$, δίνει (για κάθε πραγματικό αριθμό $t>0$):

$$P(|Y-100| \geq t) \leq \frac{100}{t^2} \qquad (1)$$

α) Η ανισότητα (1) γράφεται ως:

$$P(Y-100 \geq t \text{ ή } Y-100 \leq -t) \leq \frac{100}{t^2} \Rightarrow$$

$$\underset{\text{ξένα}}{\Rightarrow} P(Y \geq 100+t) + P(Y \leq 100-t) \leq \frac{100}{t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(Y \leq 100-t) \leq \frac{100}{t^2}$$, η οποία για $t=85$ δίνει

$$P(Y \leq 15) \leq \frac{100}{(85)^2} = \frac{4}{289}$$, οπότε $$1 - P(Y>15) \leq \frac{4}{289} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(Y>15) \geq \frac{285}{289}$$

Άρα: $$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 15\right) = P(Y \geq 15) \geq P(Y>15) \geq \frac{285}{289}$$

β) Για $t=20$, η ανισότητα (1) δίνει:

$$P(|Y-100| \geq 20) \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - P(|Y-100| < 20) \leq \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(|Y-100|<20) \geq \frac{3}{4}$$, η οποία, επειδή $P(|Y-100| \leq 20) \geq$ $\geq P(|Y-100|<20)$, δίνει: $$P(|Y-100| \leq 20) \geq \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(-20 \leq Y-100 \leq 20) \geq \frac{3}{4} \Rightarrow P(80 \leq Y \leq 120) \geq \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(80 \leq \sum_{i=1}^{100} X_i \leq 120\right) \geq 3/4$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Έστω X = πλήθος ελαττωματικών βιδών στις 10000. Τότε η τ.μ. X ακολουθεί διωνυμική πυκνότητα $\mathcal{D}(N,p)$ με $N=10000$ και $p=0.05$. Άρα: $\mu = EX = Np = 500$ και $\sigma^2 = \text{Var}X = Np(1-p) = 475$

Η ανισότητα του Chebyshev δίνει

$$P(|X-500| \geq t) \leq \frac{475}{t^2} \quad , \forall t>0 \qquad (1)$$

Ζητάμε μια τιμή του n έτσι ώστε: $P(X>n) \leq \frac{1}{100}$ με n ακέραιο

Από την (1) έχουμε:

$$P(X \geq t+500) + P(X \leq 500-t) \leq \frac{475}{t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(X \geq t+500) \leq \frac{475}{t^2}$$, η οποία για $t+500 = n+1$

δίνει: $$P(X \geq n+1) = P(X>n) \leq \frac{475}{t^2} \leq \frac{1}{100}$$

Λύνοντας την τελευταία ανισότητα, προκύπτει:

$$t^2 \geq 47500 \Rightarrow n+1-500 \geq \sqrt{47500} \Rightarrow n \geq 716.945$$

Δηλαδή αρκεί το $n \geq 717$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Έστω η συνάρτηση $g(x) = t^x$ με $t>0$ και $x \geq 0$

Τότε $g(x) = t^x = e^{x \ln t} \Rightarrow g'(x) = e^{x\ln t} \ln t = t^x \ln t \begin{cases} \geq 0 & \text{αν } t \geq 1 \\ \leq 0 & \text{αν } 0<t\leq 1 \end{cases}$

δηλ. η $g(x)$ είναι αύξουσα για $t \geq 1$ και φθίνουσα για $0<t\leq 1$

Άρα:

α) Εάν $0<t\leq 1$, τότε: $P(X\leq x_0)=P(t^X\geq t^{x_0})$ (1)

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Markov $P(Y\geq \delta)\leq \frac{EY}{\delta}$ για την τ.μ. $Y=t^X$ και $\delta=t^{x_0}$, λαμβάνουμε:

$$P(t^X\geq t^{x_0})\leq \frac{E(t^X)}{t^{x_0}}=\frac{\Phi_X(t)}{t^{x_0}}$$

οπότε από την (1) προκύπτει: $P(X\leq x_0)\leq \frac{\Phi_X(t)}{t^{x_0}}$

(Για $t=0$ το δεξί μέλος της ανισότητας απειρίζεται ενώ $P(X\leq x_0)\leq 1$ οπότε η ανισότητα είναι προφανής)

β) Εάν $t\geq 1$, τότε: $P(X\geq x_0)=P(t^X\geq t^{x_0})\leq$

$$\leq \frac{E(t^X)}{t^{x_0}}=\frac{\Phi_X(t)}{t^{x_0}}$$ (κατά τον ίδιο τρόπο με το (α))

ΑΣΚΗΣΗ 5

Επειδή η X έχει πυκνότητα Poisson με παράμετρο λ, η γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας είναι $\Phi_X(t)=e^{\lambda(t-1)}$

α) Για $x_0=\lambda/2$ και $\Phi_X(t)=e^{\lambda(t-1)}$, η ανισότητα στο (α) της Άσκησης 4:

$$P(X\leq \lambda/2)\leq \frac{e^{\lambda(t-1)}}{t^{\lambda/2}}, \quad \text{με } 0<t\leq 1$$

Έστω η $g(t)=\frac{e^{\lambda(t-1)}}{t^{\lambda/2}}$. Τότε $P(X\leq \frac{\lambda}{2})\leq g(t)$, $0<t\leq 1$

Άρα και $P(X\leq \frac{\lambda}{2})\leq \min(g(t))$ με $t\in(0,1]$

Έχουμε: $g'(t) = \dfrac{\lambda e^{\lambda(t-1)}}{t^{(\frac{\lambda}{2}+1)}}\left(t-\dfrac{1}{2}\right)$

$g'(t)=0 \Rightarrow t = 1/2$

$g''(t) = \dfrac{\lambda e^{\lambda(t-1)}}{t^{(\frac{\lambda}{2}+2)}}\left(t^2\lambda - t\lambda + \dfrac{\lambda}{4} + \dfrac{1}{2}\right)$

$g''(1/2) = \lambda e^{-\lambda/2}\, 2^{(\frac{\lambda}{2}+1)} > 0$, άρα ελάχιστο στο $t = 1/2$

με $g(1/2) = \dfrac{e^{-\lambda/2}}{(1/2)^{\lambda/2}} = \left(\dfrac{2}{e}\right)^{\lambda/2}$, δηλ. $\min(g(t)) = \left(\dfrac{2}{e}\right)^{\lambda/2}$

και $P\left(X \leq \dfrac{\lambda}{2}\right) \leq \left(\dfrac{2}{e}\right)^{\lambda/2}$

β) Για $x_0 = 2\lambda$ και $\phi_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$, η ανισότητα στο (β) της Άσκησης 4 δίνει: $P(X \geq 2\lambda) \leq \dfrac{e^{\lambda(t-1)}}{t^{2\lambda}} = h(t)$ με $t \geq 1$

Άρα: $P(X \geq 2\lambda) \leq \min(h(t))$ με $t \geq 1$

Έχουμε: $h'(t) = \dfrac{\lambda e^{\lambda(t-1)}}{t^{(2\lambda+1)}}(t-2)$, οπότε $h'(t) = 0 \Rightarrow t = 2$

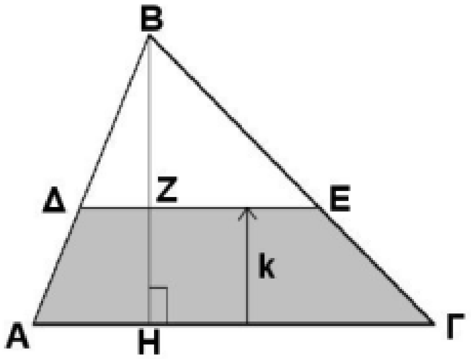
$h''(t) = \dfrac{\lambda e^{\lambda(t-1)}}{t^{(2\lambda+2)}}\left(t^2\lambda - 4t\lambda + 4\lambda + 2\right)$

$h''(2) = \dfrac{\lambda e^{\lambda}}{2^{(2\lambda+1)}} > 0$, άρα ελάχιστο στο $t = 2$ με

$h(2) = \min(h(t)) = \left(\dfrac{e}{4}\right)^{\lambda}$

Άρα: $P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\dfrac{e}{4}\right)^{\lambda}$

ΑΣΚΗΣΗ 6



Για $0 \leq k \leq h$ έχουμε:

$$F_X(k) = P(X \leq k) = \frac{\text{εμβαδόν } ΑΔΕΓ}{\text{εμβαδόν } ΑΒΓ} =$$

$$= 1 - \frac{\text{εμβαδόν } ΔΒΕ}{\text{εμβαδόν } ΑΒΓ} =$$

$$= 1 - \frac{\frac{(\text{μήκος } ΔΕ)\cdot(\text{μήκος } ΒΖ)}{\cancel{2}}}{\frac{(\text{μήκος } ΑΓ)\cdot(\text{μήκος } ΒΗ)}{\cancel{2}}} = 1 - \frac{(\text{μήκος } ΔΕ)\cdot(h-k)}{\ell \cdot h} \qquad (1)$$

αφού $(\text{μήκος } ΑΓ) = \ell$, $(\text{μήκος } ΒΖ) = h-k$, $(\text{μήκος } ΒΗ) = h$

Όμως, τα τρίγωνα ΔΒΕ και ΑΒΓ είναι όμοια. Άρα:

$$\frac{(\text{μήκος } ΔΕ)}{\ell} = \frac{h-k}{h}$$, οπότε η (1) γίνεται:

$$F_X(k) = 1 - \left(\frac{h-k}{h}\right)^2 \quad \text{για} \quad 0 \leq k \leq h$$

Άρα: $$F_X(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1 - \left(\frac{h-k}{h}\right)^2, & 0 \leq k \leq 1 \\ 1, & k > 1 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Για να είναι η $f(x)$ συνάρτηση πυκνότητας θα πρέπει $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^1 (\alpha + bx^2)\,dx = 1 \Rightarrow \left[\alpha x + \frac{bx^3}{3}\right]_0^1 = 1 \Rightarrow \alpha + \frac{b}{3} = 1 \qquad (1)$$

$$P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \int_{-\infty}^{1/2} f(x)\,dx = \frac{1}{4} \Rightarrow \int_0^{1/2} (\alpha + bx^2)\,dx = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\left[ax + \frac{bx^3}{3} \right]_0^{1/2} = \frac{1}{4} \Rightarrow a + \frac{b}{12} = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε: $a = \frac{1}{3}$, $b = 2$ οπότε και $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in R$ όπως πρέπει για μια συνάρτηση πυκνότητας.

Η συνάρτηση κατανομής λαμβάνεται ως:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \left(\frac{1}{3} + 2y^2\right) dy, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

δηλ. $$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x(1+2x^2)}{3}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Η $f(x)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας γιατί $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in R$ και

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x} \Big]_0^{\infty} = 1$$

(Αυτά θα μπορούσαν να διαπιστωθούν άμεσα, απλά παρατηρώντας ότι η $f(x)$ είναι μια εκθετική πυκνότητα με παράμετρο $\lambda = 1$).

Η συνάρτηση κατανομής $F(x)$ δίνεται ως:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

, η οποία είναι συνεχής $\forall \ x \in R$

Άρα: $P(1 \leq X < 2) = P(1 < X \leq 2) = F(2) - F(1) =$

$= 1 - e^{-2} - 1 - e^{-1} = \frac{1}{e}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Για τη συνάρτηση κατανομής της $Y = |X|$, έχουμε:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) = \begin{cases} 0 & , \quad y<0 \\ P(X=0) \overset{\text{συνεχής}}{=\!=} 0, & y=0 \\ P(-y \leq X \leq y), & y>0 \end{cases}$$

Όμως, αφού η X είναι συνεχής τ.μ. έχουμε:

$P(-y \leq X \leq y) = P(-y < X \leq y) = F_X(y) - F_X(-y)$ για $y>0$

Οπότε η συνάρτηση πυκνότητας της Y είναι:

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = F_X'(y) - F_X'(-y)\cdot(-1) = F_X'(y) + F_X'(-y) =$$

$$= f_X(y) + f_X(-y) = f(y) + f(-y), \text{ για } y>0$$

Άρα $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ f(y) + f(-y), & y>0 \end{cases}$

ΑΣΚΗΣΗ 10

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & , \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & , \quad x>0 \end{cases}$$

Οπότε: $P(1 \leq |X| \leq 2) = P(-2 \leq X \leq -1 \text{ ή } 1 \leq X \leq 2) =$

$$= P(-2 \leq X \leq -1) + P(1 \leq X \leq 2) = \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{-1} \frac{1}{2} e^{x}\,dx + \int_{1}^{2} \frac{1}{2} e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\left(e^{-1} - e^{-2}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{-1} - e^{-2}\right) =$$

$$= e^{-1} - e^{-2} = \frac{1}{e}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Οι ρίζες της εξίσωσης $4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$ είναι πραγματικοί αριθμοί αν και μόνο αν η διακρίνουσα $\Delta = (4Y)^2 - 4(Y+2)\cdot 4 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 16Y^2 - 16Y - 32 \geq 0 \Leftrightarrow Y^2 - Y - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (Y+1)\cdot(Y-2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Y \geq 2 \\ \text{ή} \\ Y \leq -1 \end{cases}$$

Δηλαδή, ζητάμε την $P(Y \geq 2 \text{ ή } Y \leq -1) = P(Y \geq 2) + P(Y \leq -1)$

Αφού η Y είναι ομοιόμορφη στο $(0,5)$, θα έχει τη συνεχή συνάρτηση κατανομής:

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{y}{5}, & 0 \leq y \leq 5 \\ 1, & y > 5 \end{cases}$$

Άρα: $P(2 \text{ πραγματικές ρίζες}) = P(Y \geq 2) + P(Y \leq -1) =$

$$= 1 - P(Y \leq 2) + P(Y \leq -1) = 1 - F(2) + F(-1) =$$

$$= 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Για να είναι η $f(x)$ συνάρτηση πυκνότητας θα πρέπει $f(x) \geq 0$ $\forall x \in R$, από την οποία προκύπτει $c \geq 0$. Επιπλέον, θα πρέπει

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \iff \int_{0}^{\infty} c x e^{-x/2}\,dx = 1 \iff \left[-2cxe^{-x/2}\right]_0^{\infty} +$$

$$+ \int_0^{\infty} 2c e^{-x/2} dx = 1 \iff \left[-2c e^{-x/2}(x+2)\right]_0^{\infty} = 1 \iff$$

$$\iff 4c = 1 \iff c = \frac{1}{4}$$

Άρα: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} x e^{-x/2}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

Ζητάμε την $P(X > 5) = \int_5^{\infty} f(x)\,dx = \int_5^{\infty} \frac{x}{4} e^{-x/2}\,dx =$

$$= \left[-\frac{(x+2)}{2} e^{-x/2}\right]_5^{\infty} = \frac{7}{2} e^{-5/2}$$