ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Πιθανότητες» (ΕΜ161) – Εαρινό Εξάμηνο 2004-2005
Διδάσκων Ι. Τσαγράκης

10^Ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Αν η X έχει πυκνότητα Poisson με παράμετρο λ, να δείξετε ότι: $P(X \leq \lambda/2) \leq 4/\lambda$ και $P(X \geq 2\lambda) \leq 1/\lambda$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Chebyshev.

Άσκηση 2: Έστω $X_1, X_2, ..., X_{100}$ θετικές ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που όλες έχουν μέση τιμή 1 και διασπορά 1. Βρείτε από ένα φράγμα για καθεμιά από τις πιθανότητες:
α) $P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 15\right)$, και β) $P\left(80 \leq \sum_{i=1}^{100} X_i \leq 120\right)$.

Άσκηση 3: Κάποιος κατασκευαστής φτιάχνει βίδες και γνωρίζει ότι το 5% της παραγωγής είναι ελαττωματικό. Στέλνει παρτίδες των 10000 τεμαχίων, δίνοντας την εγγύηση ότι αν περισσότερες από n βίδες είναι ελαττωματικές θα επιστρέψει την αμοιβή του. Πόσο μικρό μπορεί να επιλέξει το n ο κατασκευαστής ώστε να είναι βέβαιος ότι δεν θα χρειαστεί να επιστρέψει την αμοιβή του για περισσότερες από το 1% των παρτίδων;

Άσκηση 4: Έστω X μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με ακέραιες τιμές, της οποίας η γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας $\Phi_X(t) = \mathbb{E}t^X$ είναι πεπερασμένη για κάθε πραγματικό αριθμό t, και έστω x_o ένας θετικός αριθμός. Ακολουθώντας διαδικασία ανάλογη με την απόδειξη της ανισότητας του Chebyshev, δείξτε τις ανισότητες:
α) $P(X \leq x_o) \leq \dfrac{\Phi_X(t)}{t^{x_o}}$, για $0 \leq t \leq 1$, και β) $P(X \geq x_o) \leq \dfrac{\Phi_X(t)}{t^{x_o}}$, για $t \geq 1$

Άσκηση 5: Αν η X έχει πυκνότητα Poisson με παράμετρο λ, να δείξετε ότι
α) $P\left(X \leq \lambda/2\right) \leq (2/e)^{\lambda/2}$, και β) $P(X \geq 2\lambda) \leq (e/4)^{\lambda}$.
(Οι ανισότητες αυτές, ειδικά για μεγάλες τιμές του λ, προσδιορίζουν τις αντίστοιχες πιθανότητες πολύ καλύτερα από τις ανισότητες που δίδονται στην Άσκηση 1).
Υπόδειξη: Ελαχιστοποιήστε τις ποσότητες στα δεξιά μέλη των ανισοτήτων της Άσκησης 4.

Άσκηση 6: Ένα τρίγωνο έχει βάση ℓ και ύψος h. Επιλέγουμε τυχαία ένα σημείο μέσα στο τρίγωνο. Έστω X η απόσταση του σημείου από τη βάση του τριγώνου. Βρείτε τη συνάρτηση κατανομής της X.

Άσκηση 7: Αν η συνάρτηση πυκνότητας της X δίνεται ως $f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$, και $P(X \leq 1/2) = 1/4$, βρείτε τα a και b. Ποια είναι η συνάρτηση κατανομής της X;

Άσκηση 8: Έστω η συνάρτηση πυκνότητας $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$. Βρείτε την $P(1 \leq X < 2)$.

Άσκηση 9: Αν X συνεχής τ.μ. με πυκνότητα f, βρείτε έκφραση για την πυκνότητα της $Y = |X|$.

Άσκηση 10: Αν X συνεχής τ.μ. με πυκνότητα $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, για $-\infty < x < \infty$, βρείτε την $P(1 \leq |X| \leq 2)$.

Άσκηση 11: Αν η Y έχει ομοιόμορφη κατανομή στο (0,5), ποια είναι η πιθανότητα οι ρίζες της εξίσωσης $4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$, να είναι και οι δύο πραγματικοί αριθμοί;

Άσκηση 12: Μια μηχανή λειτουργεί (πριν χαλάσει) για ένα τυχαίο διάστημα X μηνών. Αν η πυκνότητα της X δίδεται από την $f(x) = \begin{cases} cxe^{-x/2}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$, ποια είναι η πιθανότητα ότι θα λειτουργήσει για τουλάχιστον 5 μήνες;