ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ (ΕΜ 161)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ 9ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

$$Var(X^2Y) = E[(X^2Y)^2] - [E(X^2Y)]^2 = E(X^4Y^2) - [E(X^2Y)]^2 =$$

$$\overset{\circledast}{=} (EX^4)(EY^2) - [(EX^2)(EY)]^2 = (EX^4)(EY^2) - (EX^2)^2(EY)^2 =$$

$$= 2\cdot 1 - 1^2\cdot 0^2 = 2$$

⊛ Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. τότε και οι X^4, Y^2 και X^2, Y είναι ανεξάρτητες (γενικά οι X^m, Y^k με $k, m \in R$ είναι ανεξάρτητες)

ΑΣΚΗΣΗ 2

α) $EX_i = 1\cdot P(X_i=1) + 0\cdot P(X_i=0) = P(X_i=1) =$

$= P(\{$το i δοχείο είναι άδειο$\}) =$

$= P(\{$οι N βόλοι κατανέμονται στα υπόλοιπα $r-1$ δοχεία$\}) =$

$$= \frac{(r-1)^N}{r^N} = \left(1-\frac{1}{r}\right)^N$$

β) Έστω η τ.μ. $Z_1 = X_i X_j = \begin{cases} 1, & \text{αν τα δοχεία } i \text{ και } j\ (i\neq j) \text{ είναι άδεια} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$$E(X_iX_j) = E(Z_1) = 1\cdot P(X_iX_j=1) + 0\cdot P(X_iX_j=0) =$$

$= P(X_iX_j=1) = P(\{$τα δοχεία i και j $(i\neq j)$ είναι άδεια$\}) =$

$= P(\{$οι N βόλοι κατανέμονται στα υπόλοιπα $r-2$ δοχεία$\}) =$

$$= \frac{(r-2)^N}{r^N} = \left(1 - \frac{2}{r}\right)^N$$

Παρατηρήστε ότι οι X_i και X_j δεν είναι ανεξάρτητες και η $E(X_i X_j)$ δεν μπορεί να υπολογιστεί ως γινόμενο $(EX_i)\cdot(EX_j)$

γ) Εξ' ορισμού $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_r = \sum_{i=1}^{r} X_i$

$$EY = \sum_{i=1}^{r} EX_i = \sum_{i=1}^{r} \left(1-\frac{1}{r}\right)^N = r\left(1-\frac{1}{r}\right)^N$$

δ) $$\operatorname{Var} Y = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{Var} X_i + 2\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=i+1}^{r} \operatorname{Cov}(X_i, X_j)$$

όπου $$\operatorname{Var} X_i = EX_i^2 - (EX_i)^2 \underset{X_i^2 = X_i}{=} EX_i - (EX_i)^2 = (EX_i)\cdot(1-EX_i) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{r}\right)^N \left[1 - \left(1-\frac{1}{r}\right)^N\right]$$

$$\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - (EX_i)\cdot(EX_j) = \left(1-\frac{2}{r}\right)^N - \left(1-\frac{1}{r}\right)^{2N}$$

Άρα: $$\operatorname{Var} Y = \sum_{i=1}^{r} \left(1-\frac{1}{r}\right)^N \left[1-\left(1-\frac{1}{r}\right)^N\right] + 2\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=i+1}^{r}\left[\left(1-\frac{2}{r}\right)^N - \left(1-\frac{1}{r}\right)^{2N}\right] =$$

$$= r\left(1-\frac{1}{r}\right)^N\left[1-\left(1-\frac{1}{r}\right)^N\right] + 2\left[\left(1-\frac{2}{r}\right)^N - \left(1-\frac{1}{r}\right)^{2N}\right]\sum_{i=1}^{r-1}(r-i) =$$

$$= r\left(1-\frac{1}{r}\right)^N\left[1-\left(1-\frac{1}{r}\right)^N\right] + 2\left[\left(1-\frac{2}{r}\right)^N - \left(1-\frac{1}{r}\right)^{2N}\right]\cdot\left[r(r-1) - \frac{(r-1)r}{2}\right] =$$

$$= r\left(1-\frac{1}{r}\right)^N\left[1-\left(1-\frac{1}{r}\right)^N\right] + r(r-1)\left[\left(1-\frac{2}{r}\right)^N - \left(1-\frac{1}{r}\right)^{2N}\right] =$$

$$= r\left(1-\frac{1}{r}\right)^N + r(r-1)\left(1-\frac{2}{r}\right)^N - r^2\left(1-\frac{1}{r}\right)^{2N}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Έστω $Y_i = \begin{cases} 1, & \text{σύμπτωση στο } i\text{-κουτί} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

τότε $X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N = \sum_{i=1}^{N} Y_i$

άρα: $EX = \sum_{i=1}^{N} EY_i = \sum_{i=1}^{N} \left[1 \cdot P(Y_i = 1) + 0 \cdot P(Y_i = 0)\right] =$

$$= \sum_{i=1}^{N} P(Y_i = 1) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(N-1)!}{N!} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} = N \cdot \frac{1}{N} = 1$$

$$\operatorname{Var} X = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{Var} Y_i + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \operatorname{Cov}(Y_i, Y_j)$$

όπου $\operatorname{Var} Y_i = EY_i^2 - (EY_i)^2 \underset{Y_i^2 = Y_i}{=} EY_i - (EY_i)^2 = \frac{1}{N} - \left(\frac{1}{N}\right)^2 = \frac{1}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right)$

και $\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = E(Y_i Y_j) - (EY_i)(EY_j)$

με $E(Y_i Y_j) = 1 \cdot P(Y_i \cdot Y_j = 1) + 0 \cdot P(Y_i \cdot Y_j = 0) = \frac{(N-2)!}{N!} = \frac{1}{N(N-1)}$, για $i \neq j$

άρα: $\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = \frac{1}{N(N-1)} - \left(\frac{1}{N}\right)^2 = \frac{1}{N}\left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right)$, για $i \neq j$

Επομένως: $\operatorname{Var} X = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{1}{N}\left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right) =$

$$= 1 - \frac{1}{N} + \frac{2}{N}\left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^{N-1} (N - i) =$$

$$= 1 - \frac{1}{N} + \cancel{\frac{2}{N}}\left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right)\left[\frac{\cancel{N}(N-1)}{\cancel{2}}\right] = 1 - \frac{1}{N} + 1 - \frac{(N-1)}{N} = 1$$

Δηλαδή: $EX = 1 = \operatorname{Var} X$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Αφού η X ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p θα έχει τη συνάρτηση πυκνότητας:

$$f_X(k) = P(X=k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, & \text{για } k=0,1,\dots,n \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Οπότε: $\Phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k} =$

$= [pt + (1-p)]^n$

από τύπο του διωνυμικού αναπτύγματος

$$M_X(t) = E(e^{Xt}) = \sum_{k=0}^{n} e^{kt} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} = \left[pe^t + (1-p)\right]^n$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να γράψουμε: $M_X(t) = \Phi_X(e^t) =$
$= [pe^t + (1-p)]^n$

α) $\Phi_X'(t) = n[pt + (1-p)]^{n-1} p$, $\Phi_X''(t) = n(n-1)\cdot[pt + (1-p)]^{n-2} p^2$

$EX = \Phi_X'(1) = np$, $Var X = \Phi_X''(1) + \Phi_X'(1) - [\Phi_X'(1)]^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow Var X = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$

β) $M_X'(t) = n[pe^t + (1-p)]^{n-1} pe^t$

$M_X''(t) = n(n-1)[pe^t + (1-p)]^{n-2} p^2 e^{2t} + n[pe^t + (1-p)]^{n-1} pe^t =$

$= npe^t [pe^t + (1-p)]^{n-2} \cdot [npe^t + (1-p)]$

$$EX = M_X'(0) = np$$

$$\operatorname{Var} X = EX^2 - (EX)^2 = M_X''(0) - \left[M_X'(0)\right]^2 = np(np+1-p) - n^2p^2 =$$
$$= np(1-p)$$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 5}}$

Έστω $X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν ο άσος } i \text{ ανήκει στον } A \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

όπου $i = \begin{cases} 1 & \text{για σπαθί} \\ 2 & \text{για καρό} \\ 3 & \text{» μπαστούνι} \\ 4 & \text{» κούπα} \end{cases}$

και $Y_j = \begin{cases} 1, & \text{αν το σπαθί } j \text{ ανήκει στον } A \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

όπου $j = \begin{cases} 1 & \text{για άσο} \\ 2 & \text{για } 2 \\ 3 & \text{για } 3 \\ \vdots & \\ 13 & \text{για } K \end{cases}$

Προφανώς: $X = \sum_{i=1}^{4} X_i$ και $Y = \sum_{j=1}^{13} Y_j$

α) Έχουμε: $\operatorname{Cov}(X,Y) = E(XY) - (EX)\cdot(EY)$

πιθανότητα παρουσίας ενός συγκεκριμένου χαρτιού σε μια 13άδα

όπου: $$EX = \sum_{i=1}^{4} EX_i = \sum_{i=1}^{4} P(X_i = 1) = \sum_{i=1}^{4} \frac{\binom{1}{1}\binom{51}{12}}{\binom{52}{13}} = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4} = 1$$

$$EY = \sum_{j=1}^{13} EY_j = \sum_{j=1}^{13} P(Y_j = 1) = \sum_{j=1}^{13} \frac{\binom{1}{1}\binom{51}{12}}{\binom{52}{13}} = \sum_{j=1}^{13} \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

$$E(XY) = E\left(\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{13} X_i Y_j\right) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{13} E(X_i Y_j)$$

Η τ.μ. $X_i Y_j$ παίρνει τις τιμές:

$$X_i Y_j = \begin{cases} 1, & \text{αν ο άσος } i \text{ και το σπαθί } j \text{ ανήκουν στον } A \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επομένως $E(X_i Y_j) = P(X_i Y_j = 1)$

Όταν $i=1$ και $j=1$ έχουμε: $P(X_1 Y_1 = 1) = P(\{$ο άσος σπαθί ανήκει στον $A\}) = \dfrac{\binom{1}{1}\binom{52}{12}}{\binom{52}{13}} = \dfrac{1}{4}$

Για κάθε άλλο συνδυασμό των i και j με $i=1,\dots,4$ και $j=1,\dots,13$ ο άσος i είναι διαφορετικό χαρτί από το σπαθί j και η πιθανότητα $P(X_i Y_j = 1) = \dfrac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{50}{11}}{\binom{52}{13}} = \dfrac{1}{17}$

πιθανότητα παρουσίας 2 συγκεκριμένων χαρτιών σε μια 13άδα

Άρα: $E(XY) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{13} P(X_i Y_j = 1) = \dfrac{1}{4} + (4\cdot 13 - 1)\cdot\dfrac{1}{17} = \dfrac{13}{4}$

Δηλαδή: $Cov(X,Y) = E(XY) - (EX)\cdot(EY) = \dfrac{13}{4} - 1\cdot\dfrac{13}{4} = 0$

β) Οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες, αφού π.χ.

$P(X=1) = \dfrac{\binom{4}{1}\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}}$, $\quad P(Y=13) = \dfrac{\binom{13}{13}\binom{39}{0}}{\binom{52}{13}} = \dfrac{1}{\binom{52}{13}}$

$$P(X=1, Y=13) = P(X=1 \setminus Y=13)\cdot P(Y=13) = P(Y=13) \neq$$

$$\neq P(X=1)\cdot P(Y=13)$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Έχουμε ότι: $V = 2 - U \Rightarrow Var(V) = Var(2-U) = Var(-U) =$
$= (-1)^2 Var(U) = Var(U)$

$$Cov(U,V) = E(UV) - (EU)\cdot(EV) = E[(2-V)\cdot V] - E(2-V)\cdot E(V) =$$
$$= E(2V - V^2) - (2 - EV)\cdot EV = 2(EV) - EV^2 -$$
$$- 2(EV) + (EV)^2 = (EV)^2 - EV^2 = -Var V$$

Επομένως: $$\rho(U,V) = \frac{Cov(U,V)}{\sqrt{(Var U)\cdot(Var V)}} = \frac{-Var V}{\sqrt{(Var V)^2}} = -1$$

Παρατήρηση: $|\rho(U,V)| = 1$, το οποίο είναι αναμενόμενο μιας και οι V, U συνδέονται γραμμικά: $V = 2 - U$

ΑΣΚΗΣΗ 7

$$P(X=k) = \begin{cases} 1/3, & \text{για } k=1,2,3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Άρα: $$EX = \sum_{k=1}^{3} k\, P(X=k) = \frac{1+2+3}{3} = 2$$

$$P(Y=m) = \sum_{k=1}^{3} P(X=k, Y=m) = \sum_{k=1}^{3} P(Y=m \setminus X=k)\cdot P(X=k) =$$
$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq m}}^{3} (1/2)\cdot(1/3) = \frac{1}{3},$$ όπου επίσης προκύπτει: $$\underset{\substack{\text{με } (k=1,2,3 \\ m=1,2,3)}}{P(X=k, Y=m)} = \begin{cases} \frac{1}{6}, & k\neq m \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Άρα: $$EY = \sum_{m=1}^{3} m\, P(Y=m) = 2$$

Η τ.μ. $Z = XY$ παίρνει τις τιμές $z = 2, 3, 6$

Άρα: $E(XY) = 2\cdot P(XY=2) + 3\cdot P(XY=3) + 6\cdot P(XY=6) =$

$= 2\cdot\left[P(X=2, Y=1) + P(X=1, Y=2)\right] +$

$+ 3\cdot\left[P(X=3, Y=1) + P(X=1, Y=3)\right] +$

$+ 6\cdot\left[P(X=2, Y=3) + P(X=3, Y=2)\right] = \frac{2+3+6}{3} = \frac{11}{3}$

Επομένως: $Cov(X,Y) = E(XY) - (EX)(EY) = \frac{11}{3} - 2\cdot 2 = -\frac{1}{3}$

$EX^2 = \sum_{k=1}^{3} k^2 P(X=k) = \frac{1^2+2^2+3^2}{3} = \frac{14}{3}$

$EY^2 = \sum_{m=1}^{3} m^2 P(Y=m) = \frac{1^2+2^2+3^2}{3} = \frac{14}{3}$

Άρα: $Var X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{14}{3} - 4 = \frac{2}{3}$

Ομοίως $Var Y = \frac{2}{3}$

Επομένως $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{(Var X)\cdot(Var Y)}} = \frac{-1/3}{2/3} = -\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 8}}$

α) $I_i J_j = \begin{cases} 1, & \text{αν η i-στή δοκιμή δώσει το 1, ΚΑΙ η j-στή δοκιμή το 2} \\ 0 & \end{cases}$

$E(I_i J_j) = 1\cdot P(I_i J_j = 1) + 0\cdot P(I_i J_j = 0) = P(I_i J_j = 1)$

Αν $i=j$ έχουμε: $E(I_i J_i) = P(I_i J_i = 1) = P($i-στη δοκιμή να δώσει το 1 <u>και</u> το 2$) = P(\{\emptyset\}) = 0$

β) Αν $i \neq j$ έχουμε: $E(I_i J_j) = P(I_i J_j = 1) = P(I_i = 1, J_j = 1) \underset{\substack{\uparrow \\ I_i, J_j \text{ ανεξάρτητα (για } i\neq j)}}{=}$

$$= P(I_i=1)\cdot P(J_j=1) = p_1\cdot p_2$$

γ) $$XY = (I_1+\ldots+I_n)\cdot(J_1+\ldots+J_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} I_i J_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(I_i J_i + \sum_{j\neq i} I_i J_j\right) = \sum_{i=1}^{n} I_i J_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} I_i J_j$$

Άρα: $$E(XY) = E\left(\sum_{i=1}^{n} I_i J_i\right) + E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} I_i J_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E(I_i J_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} E(I_i J_j) = 0 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}(p_1\cdot p_2) =$$

$$= p_1 p_2 \sum_{i=1}^{n}(n-1) = n(n-1)p_1 p_2$$

δ) $$EX = \sum_{i=1}^{n} EI_i = \sum_{i=1}^{n}\left(1\cdot P(I_i=1) + 0\cdot P(I_i=0)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(I_i=1) = \sum_{i=1}^{n} p_1 = np_1$$

$$EY = \sum_{j=1}^{n} EJ_j = \sum_{j=1}^{n}\left(1\cdot P(J_j=1) + 0\cdot P(J_j=0)\right) = \sum_{j=1}^{n} P(J_j=1) = \sum_{j=1}^{n} p_2 = np_2$$

Άρα: $$Cov(X,Y) = E(XY) - (EX)(EY) = n(n-1)p_1p_2 - n^2 p_1 p_2 =$$

$$= -np_1p_2$$

ε) $$Var\,X = \sum_{i=1}^{n} Var\,I_i + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} Cov(I_i, I_j) = \sum_{i=1}^{n} Var\,I_i$$ → μιας και $Cov(I_i, I_j)=0$ για $i\neq j$, εφόσον I_i, I_j ανεξάρτητα για $i\neq j$

όπου: $$Var\,I_i = EI_i^2 - (EI_i)^2 \underset{I_i^2=I_i}{=} EI_i(1-EI_i) = p_1(1-p_1)$$

οπότε: $Var\,X = np_1(1-p_1)$

Ομοίως: $Var\,Y = np_2(1-p_2)$

Άρα: $$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{(Var\,X)\cdot(Var\,Y)}} = \frac{-np_1p_2}{\sqrt{n^2 p_1p_2(1-p_1)(1-p_2)}} = -\sqrt{\frac{p_1p_2}{(1-p_1)\cdot(1-p_2)}}$$