ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Πιθανότητες» (ΕΜ161) – Εαρινό Εξάμηνο 2004-2005
Διδάσκων Ι. Τσαγράκης

9ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Αν X και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{E}X^4 = 2$, $\mathbb{E}Y^2 = 1$, $\mathbb{E}X^2 = 1$, και $\mathbb{E}Y = 0$, υπολογίστε την $\operatorname{Var}(X^2Y)$.

Άσκηση 2: Υποθέτουμε ότι N βώλοι κατανέμονται τυχαία σε r δοχεία. Θέτουμε $X_i = 1$ αν το δοχείο i είναι άδειο, και $X_i = 0$ αλλιώς.
α) Υπολογίστε την $\mathbb{E}X_i$.
β) Αν $i \neq j$, υπολογίστε την $\mathbb{E}(X_iX_j)$.
γ) Αν Y είναι το πλήθος των άδειων δοχείων, υπολογίστε την $\mathbb{E}Y$.
δ) Υπολογίστε την $\operatorname{Var}Y$.

Άσκηση 3: Βάζουμε N αριθμημένους βόλους σε N αριθμημένα κουτιά ώστε σε κάθε κουτί μπαίνει ένας βόλος. Λέμε ότι έχουμε σύμπτωση στο i-κουτί αν έχει σε αυτό μπει ο i-βόλος. Αν X είναι το πλήθος των συμπτώσεων, υπολογίστε την $\mathbb{E}X$ και την $\operatorname{Var}X$.

Άσκηση 4: Βρείτε τη γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας $\Phi_X(t)$ και τη ροπογεννήτρια $M_X(t)$ της τυχαίας μεταβλητής X, αν η X ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p. Υπολογίστε την $\mathbb{E}X$ και την $\operatorname{Var}X$ χρησιμοποιώντας: α) την $\Phi_X(t)$, και β) την $M_X(t)$

Άσκηση 5: Τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας μοιράζονται σε 4 παίχτες (ο καθένας παίρνει 13). Έστω, X και Y το πλήθος των άσων και σπαθιών αντίστοιχα που παίρνει ο παίχτης Α.
α) Δείξτε ότι $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$.
β) Δείξτε ότι οι X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

Άσκηση 6: Ένα δοχείο περιέχει 3 κόκκινους και 2 μαύρους βόλους. Επιλέγουμε τυχαίο δείγμα μεγέθους 2, χωρίς επανατοποθέτηση. Έστω U το πλήθος των κόκκινων και V το πλήθος των μαύρων, από τους βόλους που επιλέχθηκαν. Υπολογίστε το συντελεστή συσχέτισης $\rho(U,V)$.

Άσκηση 7: Ένα κουτί περιέχει 3 βόλους που φέρουν τους αριθμούς 1, 2 και 3. Επιλέγουμε τυχαία δύο βόλους από το κουτί χωρίς επανατοποθέτηση. Έστω X ο αριθμός στον πρώτο βόλο και Y ο αριθμός στο δεύτερο βόλο. Υπολογίστε την $\operatorname{Cov}(X,Y)$ και τον $\rho(X,Y)$.

Άσκηση 8: Εκτελούμε n φορές ένα πείραμα που έχει r δυνατά αποτελέσματα $1,2,\ldots,r$ τα οποία συμβαίνουν με πιθανότητες $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Έστω X το πλήθος των δοκιμών στις οποίες συμβαίνει το πρώτο αποτέλεσμα, και Y το πλήθος των δοκιμών στις οποίες συμβαίνει το δεύτερο αποτέλεσμα. Επίσης, ορίζουμε $I_i = 1$ αν η i-στή δοκιμή δώσει το αποτέλεσμα 1 και $I_i = 0$ αλλιώς. Ομοίως, ορίζουμε $J_i = 1$ αν η i-στή δοκιμή δώσει το αποτέλεσμα 2 και $J_i = 0$ αλλιώς. Επομένως, $X = I_1 + \ldots + I_n$ και $Y = J_1 + \ldots + J_n$. Δείξτε με τη σειρά τα εξής:
α) $\mathbb{E}(I_iJ_i) = 0$
β) Αν $i \neq j$, τότε $\mathbb{E}(I_iJ_j) = p_1p_2$
γ) $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} I_iJ_i\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} I_iJ_j\right) = n(n-1)p_1p_2$
δ) $\operatorname{Cov}(X,Y) = -np_1p_2$
ε) $\rho(X,Y) = -\sqrt{\dfrac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}}$