ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ (ΕΜ 161)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ 8ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

$$f_X(x|y) = P(X=x \mid Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f(x,y)}{\sum_{x=1}^{2} f(x,y)} \text{ , όπου}$$

$x=1,2$ και $y=1,2$

α) $$f_X(x|1) = \frac{f(x,1)}{f(1,1)+f(2,1)} = \frac{f(x,1)}{1/4} = 4f(x,1) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{για } x=1,2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

β) $$f_X(x|2) = \frac{f(x,2)}{f(1,2)+f(2,2)} = \frac{f(x,2)}{3/4} = \frac{4}{3}f(x,2) = \begin{cases} 1/3, & \text{για } x=1 \\ 2/3, & \text{για } x=2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

γ) ΟΧΙ, αφού $P(X=1, Y=1) = f(1,1) = \frac{1}{8}$, ενώ $P(X=1) = f_X(1) = \sum_{y=1}^{2} f(1,y) =$
$= f(1,1) + f(1,2) = \frac{3}{8}$ και $P(Y=1) = f_Y(1) = 1/4$, δηλαδή:

$$P(X=1, Y=1) = \frac{1}{8} \neq P(X=1)\cdot P(Y=1) = \frac{3}{32}$$

δ) $$P(XY \leq 3) = P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=1) + P(X=1, Y=2) =$$
$$= f(1,1) + f(2,1) + f(1,2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(X+Y>2) = P(X=2, Y=1) + P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=2) =$$
$$= f(2,1) + f(1,2) + f(2,2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

άλλος τρόπος: $P(X+Y>2) = 1 - P(X+Y \leq 2) = 1 - P(X=1, Y=1) = 1 - f(1,1) = \frac{7}{8}$

$$P(X/Y>1) = P(X>Y) = P(X=2, Y=1) = f(2,1) = 1/8$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

$$f_Y(k) = P(Y=k) = P(5X+6=k) = P\left(X = \frac{k-6}{5}\right) = f_X\left(\frac{k-6}{5}\right)$$

$$f_Z(k) = P(Z=k) = P(-5X+6=k) = P\left(X = \frac{6-k}{5}\right) = f_X\left(\frac{6-k}{5}\right)$$

$$F_Y(k) = P(Y\leq k) = P(5X+6\leq k) = P\left(X \leq \frac{k-6}{5}\right) = F_X\left(\frac{k-6}{5}\right)$$

$$F_Z(k) = P(Z\leq k) = P(-5X+6\leq k) = P\left(X \geq \frac{6-k}{5}\right) =$$

$$= P\left(X > \frac{6-k}{5}\right) + P\left(X = \frac{6-k}{5}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{6-k}{5}\right) + P\left(X = \frac{6-k}{5}\right) =$$

$$= 1 - F_X\left(\frac{6-k}{5}\right) + f_X\left(\frac{6-k}{5}\right)$$

$$EY = E(5X+6) = E(5X) + E(6) = 5\cdot EX + 6$$

$$EZ = E(-5X+6) = E(-5X) + E(6) = -5\cdot EX + 6$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Η X ακολουθεί κατανομή Poisson. Άρα:

$$f_X(k) = P(X=k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, & \text{για } k=0,1,2,\dots \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}, \lambda>0. \text{ Επομένως:}$$

$$E(Y) = E\left((1+X)^{-1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left((1+k)^{-1}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\right) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k+1)\cdot k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} =$$

$$\underset{m=k+1}{=} \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!} - \frac{\lambda^0}{0!}\right) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$$

$$E(Z) = E(e^X) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\right) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e} = e^{\lambda(e-1)}$$

$$E(W) = E(\cos(\pi X)) = \sum_{k=0}^{\infty}\cos(\pi k)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda}e^{-\lambda} = e^{-2\lambda}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Αφού η X ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p \in (0,1)$, ισχύει:

$$f_X(k) = P(X=k) = \begin{cases} (1-p)^k p, & \text{για } k=0,1,2,\dots \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η τ.μ. $Y=X^2$ έχει πιθανές τιμές τις $m=0,1^2,2^2,3^2,\dots$

Άρα: $f_Y(m) = P(Y=m) = P(X^2=m) = P(X=\pm\sqrt{m}) = P(X=\sqrt{m}) =$

$$= \begin{cases} (1-p)^{\sqrt{m}} p, & \text{για } m=0,1^2,2^2,3^2,\dots \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η μέση τιμή EY μπορεί να βρεθεί με δυο τρόπους:

<u>1ος Τρόπος:</u> $EY = E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 f_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1-p)^k p = p \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1-p)^k}_{\sum_{k=0}^{\infty} k^2 r^k = \frac{r(1+r)}{(1-r)^3},\ \text{με } |r|<1,\ \text{εδώ: } r=(1-p)} =$

$$= p\,\frac{(1-p)(2-p)}{(1-(1-p))^3} = \frac{(1-p)(2-p)}{p^2}$$

<u>2ος Τρόπος:</u> $EY = \sum_{m=0}^{\infty} m f_Y(m) \underset{k^2=m}{=} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 f_Y(k^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1-p)^k p = \underbrace{\dots}_{\text{ίδια με 1ο τρόπο}}$

μόνο τα τέλεια τετράγωνα

ΑΣΚΗΣΗ 5

Έχουμε 50 ζευγάρια. Για κάθε ζευγάρι με τον αριθμό i, ορίζουμε την τ.μ. X_i ως εξής: $X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν το ζευγάρι με αριθμό } i \text{ έμεινε στο κουτί} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

με $i=1,2,\dots,50$. Άρα το πλήθος των ζευγαριών που έμειναν στο κουτί είναι:

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_{50} = \sum_{i=1}^{50} X_i$. Επομένως, $EX = \sum_{i=1}^{50} EX_i =$

$$= \sum_{i=1}^{50} \left(1 \cdot P(X_i=1) + 0 \cdot P(X_i=0)\right) = \sum_{i=1}^{50} P(X_i=1)$$

Για να υπολογίσουμε την $P(X_i=1)$, θεωρούμε τη διαμέριση των 100 καρτών σε $\begin{cases} 2 \text{ κάρτες με τον αριθμό } i \\ 98 \text{ κάρτες χωρίς τον αριθμό } i \end{cases}$, Άρα:

$$P(X_i=1) = P\left(\{\text{το ζευγάρι με αριθμό } i \text{ έμεινε στο κουτί}\}\right) =$$

$$= P\left(\{0 \text{ κάρτες με τον αριθμό } i \text{ στο δείγμα μεγέθους } m\}\right) =$$

$$= \frac{\binom{2}{0}\binom{98}{m}}{\binom{100}{m}} = \frac{98!}{\cancel{m!}(98-m)!}\,\frac{\cancel{m!}(100-m)!}{100!} = \frac{(100-m)(99-m)}{100\cdot 99} =$$

$$= \left(1-\frac{m}{100}\right)\left(1-\frac{m}{99}\right)$$

Επομένως: $$EX = \sum_{i=1}^{50}\left(1-\frac{m}{100}\right)\left(1-\frac{m}{99}\right) = 50\cdot\left(1-\frac{m}{100}\right)\left(1-\frac{m}{99}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Έστω $X=$ πλήθος χαλασμένων από τα 3 που διαλέγουμε. Άρα, ψάχνουμε την EX. Η τμ X παίρνει τις τιμές $k=0,1,2,3$.

Διαμέριση 20 αντικειμένων: $\begin{cases} 4 \text{ χαλασμένα} \\ 16 \text{ μη-χαλασμένα} \end{cases}$

Επιλογή 3 αντικειμένων χωρίς επανατοποθέτηση και χωρίς ενδιαφέρον για τη διάταξή τους. Άρα:

$$P(X=k) = P\left(\{k \text{ χαλασμένα και } (3-k) \text{ μη-χαλασμένα σε δείγμα μεγέθους } 3\}\right) =$$

$$= \frac{\binom{4}{k}\binom{16}{3-k}}{\binom{20}{3}}$$

Οπότε: $$EX = \sum_{k=0}^{3} k\,P(X=k) = \sum_{k=0}^{3} \frac{k\binom{4}{k}\binom{16}{3-k}}{\binom{20}{3}} = \frac{1}{\binom{20}{3}}\left[\binom{4}{1}\binom{16}{2} + 2\cdot\binom{4}{2}\binom{16}{1} +\right.$$

$$\left. + 3\cdot\binom{4}{3}\right] = \frac{3!\,17!}{20!}\left(4\cdot\frac{16\cdot 15}{2} + 2\cdot 6\cdot 16 + 3\cdot 4\right) = \frac{3}{5}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Έστω, η τ.μ. $X=$ κέρδος ενός λαχνού (σε €). Άρα, η X παίρνει τις τιμές $0, 20, 100, 500$ με πιθανότητες:

$$P(X=0)=\frac{\#\text{ λαχνών που δεν κερδίζουν}}{\text{συνολικό πλήθος λαχνών}}=\frac{10{,}000-(200+20+5)}{10{,}000}=$$

$$=\frac{9775}{10000}=\frac{391}{400}$$

$$P(X=20)=\frac{\text{πλήθος βραβείων των } 20\text{ €}}{\text{συνολικό πλήθος λαχνών}}=\frac{200}{10{,}000}=\frac{1}{50}$$

Ομοίως: $P(X=100)=\frac{20}{10{,}000}=\frac{1}{500}$ και $P(X=500)=\frac{5}{10000}=\frac{1}{2000}$

Επειδή, κάθε λαχνός θα πρέπει να κοστίζει τιμή ίση με την EX, έχουμε: $EX=\sum_k kP(X=k)=0\cdot P(X=0)+20\cdot P(X=20)+$

$$+100\cdot P(X=100)+500\cdot P(X=500)=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{17}{20}=$$

$$=0.85\text{ €}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Εφόσον οι X, Y ακολουθούν γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p, θα ισχύει: $P(X=k)=\begin{cases}(1-p)^k p, & k=0,1,2,\dots\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$, $P(Y=m)=\begin{cases}(1-p)^m p, & m=0,1,2,\dots\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$

α) $$P(X=k \setminus X+Y=n)=\frac{P(X=k, X+Y=n)}{P(X+Y=n)} \qquad (1)$$

όπου $P(X=k, X+Y=n)=P(X=k, Y=n-k)\underset{X,Y\text{ ανεξαρτ.}}{=}P(X=k)\cdot P(Y=n-k)=$

$$\underset{k\le n}{=}(1-p)^k p\,(1-p)^{n-k} p = (1-p)^n p^2 \qquad (2)$$

και $P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k, X+Y=n) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k, Y=n-k) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\cdot P(Y=n-k) = \sum_{k=0}^{n} (1-p)^k p\,(1-p)^{n-k} p =$$

$$= (1-p)^n p^2 \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)(1-p)^n p^2 \qquad (3)$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσε κατευθείαν να ειπωθεί ότι αφού η τ.μ. $Z=X+Y$ είναι άθροισμα 2 ανεξάρτητων ομοκατανεμημένων γεωμετρικών τ.μ. με παράμετρο p, θα ακολουθεί αρνητική διωνυμική κατανομή με παραμέτρους 2 και p (βλ. πρόταση σελ. 83, τέλος §3.5). Άρα:

$$P(X+Y=n) = \binom{2+n-1}{n} p^2(1-p)^n = \binom{n+1}{n}(1-p)^n p^2 = (n+1)(1-p)^n p^2$$

Αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στην (1), προκύπτει:

$$P(X=k \mid X+Y=n) = \frac{1}{n+1}, \text{ για } k=0,1,\dots,n \text{ και } n=0,1,\dots$$

β) $E(X \mid X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} k\, P(X=k \mid X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n+1} = \frac{1}{n+1}\frac{n(n+1)}{2} =$

$$= \frac{n}{2}$$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 9}}$

α) $E(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Z\ge k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\min(X,M)\ge k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X\ge k, M\ge k) \underset{X,M \text{ ανεξάρτ.}}{=}$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(X\ge k)\cdot P(M\ge k)$$

X ακολουθεί γεωμετρική κατανομή. Άρα $P(X\ge k) = (1-p)^k$, $k=0,1,\dots$

$$P(M\ge k) = \begin{cases} 1, & \text{αν } k\le M \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Άρα: $E(Z) = \sum_{k=1}^{M} (1-p)^k = \sum_{k=0}^{M} (1-p)^k - (1-p)^0 = \sum_{k=0}^{M} (1-p)^k - 1$

Όμως $\sum_{k=0}^{M}(1-p)^k$ είναι άθροισμα γεωμετρικής σειράς, δηλ. είναι της μορφής $\sum_{k=0}^{M} r^k = \frac{1-r^{M+1}}{1-r}$, όπου εδώ $r=1-p$. Άρα:

$$E(Z) = \frac{1-(1-p)^{M+1}}{1-(1-p)} - 1 = \frac{(1-p)-(1-p)^{M+1}}{p} = \left(\frac{1-p}{p}\right)\cdot\left[1-(1-p)^M\right]$$

β) $P(Y<k) = P(\max(X,M)<k) = P(X<k,\ M<k) \underset{X,M \text{ ανεξάρτ.}}{=}$

$$= P(X<k)\cdot P(M<k) = \left[1-P(X\geq k)\right]\left[1-P(M\geq k)\right] =$$

$$= \begin{cases} 1-(1-p)^k, & k=M+1, M+2, \ldots \\ 0, & k=0,1,\ldots,M \end{cases}$$

Άρα: $E(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Y\geq k) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[1-P(Y<k)\right] = \sum_{k=1}^{M} 1 + \sum_{k=M+1}^{\infty}\left(1-1+(1-p)^k\right) =$

$$= M + \sum_{k=M+1}^{\infty}(1-p)^k = M + \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k - \sum_{k=0}^{M}(1-p)^k =$$

$$= M + \frac{1}{1-(1-p)} - \frac{1-(1-p)^{M+1}}{1-(1-p)} = M + \frac{(1-p)^{M+1}}{p}$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

$$f(k|m) = P(X=k \backslash Y=m) = \frac{P(X=k,\ Y=m)}{P(Y=m)}$$

Θεωρούμε ακολουθία 10 δοκιμών Bernoulli με $\begin{cases} \text{"επιτυχία" = εμφάνιση "5"} \\ \text{"αποτυχία" = εμφάνιση "όχι 5"} \end{cases}$

και επομένως πιθανότητα "επιτυχίας" $p=\frac{1}{6}$. Άρα:

$P(Y=m) = P(m \text{ ακριβώς "επιτυχίες"}) = \binom{10}{m}\left(\frac{1}{6}\right)^m\left(\frac{5}{6}\right)^{10-m}$ με $m=0,1,\ldots,10$

Θεωρούμε ακολουθία 10 ανεξάρτητων δοκιμών με 3 δυνατά αποτελέσματα δηλ. $\begin{cases} \text{εμφάνιση "6" με πιθανότητα } p_1 = 1/6 \\ \text{εμφάνιση "5" με} \quad \gg \quad p_2 = 1/6 \\ \text{εμφάνιση "όχι 5 και 6" με πιθανότητα } p_3 = \frac{4}{6} = 1-(p_1+p_2) \end{cases}$

και έστω η τ.μ. Z = πλήθος ενδείξεων διαφορετικών από "5" και "6".
Τότε οι τ.μ. X, Y, Z ακολουθούν πολυωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n=10$, $p_1 = 1/6$, $p_2 = 1/6$, $p_3 = \frac{4}{6}$. Επομένως:

$$P(X=k, Y=m) = P(X=k, Y=m, Z=10-k-m) =$$

$$= \frac{10!}{k!\, m!\, (10-k-m)!} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{6}\right)^m \left(\frac{4}{6}\right)^{10-k-m} \quad \text{, όπου} \begin{cases} k=0,1,\ldots,10 \\ m=0,1,\ldots,10 \\ k+m \le 10 \end{cases}$$

Άρα: $$f(k|m) = \frac{\frac{\cancel{10!}}{k!\,\cancel{m!}\,(10-k-m)!} \left(\frac{1}{6}\right)^k \cancel{\left(\frac{1}{6}\right)^m} \left(\frac{4}{6}\right)^{10-k-m}}{\frac{\cancel{10!}}{\cancel{m!}\,(10-m)!} \cancel{\left(\frac{1}{6}\right)^m} \left(\frac{5}{6}\right)^{10-m}} =$$

$$= \frac{(10-m)!}{k!\,(10-k-m)!} \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{4}{6}\right)^{10-k-m}}{\left(\frac{5}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k-m}} = \binom{10-m}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{10-m-k}$$

όπου $k = 0,1,\ldots,10-m$ με $m = 0,1,\ldots,10$

$$E(X \mid Y=m) = \sum_{k=0}^{10-m} k\, f(k|m) = \sum_{k=0}^{10-m} k \binom{10-m}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{10-m-k} = \frac{(10-m)}{5} =$$

$= 2 - \frac{m}{5}$, μιας και η $f(k|m)$ είναι διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 10-m$ και $p = 1/5$ και άρα θα έχει μ.τ. $np = (10-m)/5$. Εναλλακτικά, μπορούμε να κάνουμε αναλυτικά τους υπολογισμούς, οπότε: $E(X \mid Y=m) = \sum_{k=1}^{10-m} k \frac{(10-m)!}{k!\,(10-m-k)!} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{10-m-k} =$

$$= \sum_{k=1}^{10-m} \frac{(10-m)!}{(k-1)!\,(10-m-k)!} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{10-m-k} \underset{t=k-1}{=} \sum_{t=0}^{9-m} \frac{(9-m)!\,(10-m)}{t! \cdot (9-m-t)!} \left(\frac{1}{5}\right)^{t+1} \left(\frac{4}{5}\right)^{9-m-t} =$$

$$= (10-m)\frac{1}{5} \sum_{t=0}^{9-m} \binom{9-m}{t} \left(\frac{1}{5}\right)^t \left(\frac{4}{5}\right)^{9-m-t} = \frac{10-m}{5}\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right)^{9-m} = \frac{10-m}{5} = 2 - \frac{m}{5}$$