

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Πιθανότητες» (EM161) – Εαρινό Εξάμηνο 2004-2005
Διδάσκων Ι. Τσαγράκης

8^ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $f(x, y) = P(X = x, Y = y)$ των τυχαίων μεταβλητών X και Y δίνεται ως $f(1,1) = 1/8$, $f(1,2) = 1/4$, $f(2,1) = 1/8$, $f(2,2) = 1/2$ και $f(x, y) = 0$ για όλα τα υπόλοιπα ζεύγη $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- α) Βρείτε τη δεσμευμένη πυκνότητα της X δεδομένου ότι $Y = 1$.
β) Βρείτε τη δεσμευμένη πυκνότητα της X δεδομένου ότι $Y = 2$.
γ) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;
δ) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(XY \leq 3)$, $P(X + Y > 2)$, $P(X/Y > 1)$

Άσκηση 2: Αν η τυχαία μεταβλητή X έχει γνωστή συνάρτηση πυκνότητας f_X και κατανομής F_X , και πεπερασμένη μέση τιμή $\mathbb{E}X$, βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας, τη συνάρτηση κατανομής και τη μέση τιμή των τυχαίων μεταβλητών $Y = 5X + 6$ και $Z = -5X + 6$ με βάση τις f_X , F_X και $\mathbb{E}X$.

Άσκηση 3: Αν η X ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λ , βρείτε τη μέση τιμή της $Y = (1 + X)^{-1}$, τη μέση τιμή της $Z = e^X$ και τη μέση τιμή της $W = \cos(\pi X)$.

Άσκηση 4: Αν η X ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p , βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας και τη μέση τιμή της $Y = X^2$.

Άσκηση 5: Σε ένα κουτί έχουμε 100 κάρτες. Δύο έχουν επάνω τον αριθμό 1, δύο τον αριθμό 2, δύο τον αριθμό 3, κ.ο.κ. Τραβάμε m κάρτες από το κουτί. Έστω X το πλήθος των ζευγαριών που έμειναν μέσα στο κουτί. Βρείτε την $\mathbb{E}X$. (Υπόδειξη: Γράψτε το X ως άθροισμα τυχαίων μεταβλητών).

Άσκηση 6: Σε ένα κουτί έχουμε 20 αντικείμενα από τα οποία 4 είναι χαλασμένα. Διαλέγετε 3 αντικείμενα από το κουτί. Πόσα κατά μέσο όρο περιμένετε να είναι χαλασμένα από αυτά τα 3;

Άσκηση 7: Σε μια κλήρωση υπάρχουν 200 βραβεία των 20 €, 20 βραβεία των 100 € και 5 βραβεία των 500 €. Εάν πρόκειται να μοιραστούν 10,000 λαχνοί, πόσο πρέπει να πληρώσει κανείς για ένα λαχνό;

Άσκηση 8: Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν γεωμετρική κατανομή με την ίδια παράμετρο p . Βρείτε τα εξής:

- α) $P(X = k \mid X + Y = n)$,
β) $\mathbb{E}(X \mid X + Y = n)$

Άσκηση 9: Έστω X γεωμετρικά κατανομημένη τυχαία μεταβλητή και $M > 0$ ακέραιος. Θέτουμε $Z = \min(X, M)$ και $Y = \max(X, M)$. Υπολογίστε:

- α) τη μέση τιμή της Z . (Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 5, σελ. 108).
β) τη μέση τιμή της Y . (Υπόδειξη: υπολογίστε την $P(Y < y)$ και κατόπιν χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 5, σελ. 108).

Άσκηση 10: Ρίχνουμε ένα ζάρι 10 φορές. Αν X είναι το πλήθος των εξαριών και Y το πλήθος των πενταριών που εμφανίζονται, τότε υπολογίστε τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας $f(k \mid m) = P(X = k \mid Y = m)$ και τη δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}(X \mid Y = m)$.