ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Πιθανότητες» (ΕΜ161) – Εαρινό Εξάμηνο 2004-2005
Διδάσκων Ι. Τσαγράκης

7^o ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Ρίχνουμε δύο ζάρια. Υπολογίστε τις συναρτήσεις πυκνότητας των επόμενων τυχαίων μεταβλητών. (Τις αναγνωρίζετε;)
α) X = το πλήθος των ρίψεων μέχρι να έρθει για πρώτη φορά άθροισμα 7.
β) Y = το πλήθος των διπλών εξαριών («εξάρες») που εμφανίζονται αν ρίξουμε τα ζάρια 100 φορές.
γ) Z = το πλήθος των ρίψεων χωρίς «άσο-δύο» που έχουμε φέρει μέχρι και την 100^η φορά που φέρνουμε «άσο-δύο».

Άσκηση 2: Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο $\{0,1,...,N\}$. Βρείτε τα εξής:
α) $P(X \geq Y)$ και $P(X = Y)$
β) τις πυκνότητες των min(X,Y), max(X,Y), $|Y - X|$, $X + Y$.
γ) Βρείτε τα ζητούμενα των (α) και (β) εάν οι X, Y ακολουθούν κατανομή Bernoulli ή γεωμετρική.

Άσκηση 3: Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν κατανομές Poisson με παραμέτρους λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Βρείτε τις συναρτήσεις πυκνότητας των: α) $X + Y$ και β) X / Y.

Άσκηση 4: Ρίχνουμε 2 ζάρια. Βρείτε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των X και Y αν:
α) X είναι η μικρότερη και Y η μεγαλύτερη τιμή των ζαριών.
β) X είναι η τιμή του πρώτου ζαριού και Y η μεγαλύτερη από τις δυο τιμές.
Ποιες είναι οι αντίστοιχες περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των X και Y;

Άσκηση 5: Σε ένα κουτί έχουμε 5 μαύρους και 8 κόκκινους βόλους. Τραβάτε 3 χωρίς επανατοποθέτηση. Έστω $X_i = \begin{Bmatrix} 1, & \text{αν ο } i-\text{στος βόλος που τραβάμε είναι μαύρος} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{Bmatrix}$, για $i = 1, 2, 3$.
Βρείτε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των α) X_1, X_2 και β) X_1, X_2, X_3.

Άσκηση 6: Θεωρούμε ένα πείραμα που έχει τρία δυνατά αποτελέσματα τα οποία συμβαίνουν με πιθανότητες p_1, p_2, και p_3, αντίστοιχα. Εκτελούμε n ανεξάρτητες επαναλήψεις του πειράματος, και συμβολίζουμε με X_i το πλήθος των δοκιμών στις οποίες εμφανίζεται το i–στό αποτέλεσμα.
(α) Ποια είναι η πυκνότητα της $X_1 + X_2$;
(β) Βρείτε την $P(X_2 = y \setminus X_1 + X_2 = z)$, για $y = 0, 1, ..., z$.

Άσκηση 7: Χρησιμοποιήστε την προσέγγιση Poisson για να υπολογίσετε την πιθανότητα το πολύ 2 σε ένα δείγμα 50 ατόμων να έχουν πλαστή άδεια οδήγησης, αν είναι γνωστό ότι αυτό ισχύει για το 5% των οδηγών.

Άσκηση 8: Έστω X, Y, Z ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που έχουν πυκνότητες Poisson με παραμέτρους λ_1, λ_2 και λ_3 αντίστοιχα. Βρείτε την $P(X = x, Y = y, Z = z \setminus X + Y + Z = x + y + z)$, όπου x, y, και z είναι μη-αρνητικοί ακέραιοι.

Άσκηση 9: Έστω X μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με ακέραιες τιμές, που έχει γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας την $\Phi_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t^2-1)}$, όπου $\lambda > 0$. Βρείτε την f_X.