ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ (ΕΜ 161)

ΣΥΝΤΟΜΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ 6ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Έστω X= η φορά που πρωτοεμφανίζεται άσπρος βόλος. Δηλαδή, αν $X=1$ ο πρώτος που τραβά βγάζει άσπρο βόλο, αν $X=2$, ο δεύτερος που τραβά βγάζει άσπρο ενώ ο πρώτος δεν έβγαλε άσπρο κ.ο.κ. Ο Α τραβάει τον 1ο βόλο, μετά τον 4ο, μετά τον 7ο, τον 10ο κ.ο.κ. Αντίστοιχα, ο Β τραβάει το 2ο βόλο, τον 5ο, τον 8ο, κ.ο.κ., και ο Γ τραβάει τον 3ο βώλο, τον 6ο, τον 9ο, κ.ο.κ.

Επομένως, ο Α κερδίζει αν $X=1$, $X=4$, $X=7$, $X=10, \ldots, X=3K+1$, $K=0,1,\ldots$

Αντίστοιχα, ο Β κερδίζει αν $X=2$, $X=5$, $X=8$, $X=11, \ldots X=3K+2$, $K=0,1,\ldots$

και ο Γ κερδίζει αν $X=3$, $X=6$, $X=9$, $X=12, \ldots, X=3K+3$, $K=0,1,\ldots$

Η μεγάλη διαφορά ανάμεσα στο α) και β) ερώτημα είναι ότι αν οι βόλοι δεν επανατοποθετούνται στο δοχείο σταματάμε σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων (αφού το μέγιστο την 9η φορά θα βγει άσπρος βόλος), ενώ αν οι βόλοι επανατοποθετούνται, η διαδικασία απειρίζεται. Έτσι έχουμε:

α) $P(\text{κερδίζει ο A}) = P(X=1) + P(X=4) + P(X=7) + \ldots = \sum_{K=0}^{\infty} P(X=3K+1)$

$P(\text{κερδίζει ο B}) = P(X=2) + P(X=5) + P(X=8) + \ldots = \sum_{K=0}^{\infty} P(X=3K+2)$

$P(\text{κερδίζει ο Γ}) = P(X=3) + P(X=6) + P(X=9) + \ldots = \sum_{K=0}^{\infty} P(X=3K+3)$

Οι πιθανότητες αυτές υπολογίζονται ως εξής:

$P(X=1) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, $P(X=2) = \frac{8}{12}\cdot\frac{4}{12} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$, $P(X=3) = \frac{8}{12}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{4}{12} = \left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}$

$P(X=4) = \frac{8}{12}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{4}{12} = \left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}$ και γενικά $P(X=m) = \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}\cdot\frac{1}{3}$

Εναλλακτικά, μπορούσαμε να θεωρήσουμε τη διαδικασία ως ακολουθία δοκιμών Bernoulli με "επιτυχία" = {επιλογή άσπρου βόλου}, και πιθανότητα "επιτυχίας" $p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, οπότε η πιθανότητα η 1η "επιτυχία" να συμβεί στην m δοκιμή θα δίνεται από γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p = 1/3$, δηλαδή $P(X=m) = (1-p)^{m-1}p = \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

Άρα οι ζητούμενες πιθανότητες είναι:

$$P(\text{κερδίζει ο } A) = \sum_{K=0}^{\infty} P(X=3K+1) = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{3K} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{K=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{K} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{8}{27}\right)^{K}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{8}{27}}\right) = \frac{9}{19}$$ μιας και το $\sum_{K=0}^{\infty}\left(\frac{8}{27}\right)^K$ είναι άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής σειράς με λόγο $\frac{8}{27}<1$

$$P(\text{κερδίζει ο } B) = \sum_{K=0}^{\infty} P(X=3K+2) = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{3K+1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{8}{27}\right)^{K} = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{1-\frac{8}{27}}\right) = \frac{6}{19}$$

$$P(\text{κερδίζει ο } \Gamma) = \sum_{K=0}^{\infty} P(X=3K+3) = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{3K+2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{8}{27}\right)^{K} = \frac{4}{27}\left(\frac{1}{1-\frac{8}{27}}\right) = \frac{4}{19}$$

Εναλλακτικά (και απλούστερα): $P(\text{κερδίζει ο } \Gamma) = 1 - P(\text{κερδίζει ο } A) - P(\text{κερδίζει ο } B)$

β) $$P(\text{κερδίζει ο } A) = P(X=1) + P(X=4) + P(X=7) = \frac{4}{12} + \frac{\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}} \cdot \frac{4}{9} + \frac{\binom{8}{6}}{\binom{12}{6}} \cdot \frac{4}{6} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{8!\ 9!}{5!\ 12!} \cdot \frac{4}{9} + \frac{8!\ 6!}{2 \cdot 12!} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{3} + \frac{56}{495} + \frac{2}{99} = \frac{231}{495} = \frac{7}{15}$$

$$P(\text{κερδίζει ο } B) = P(X=2) + P(X=5) + P(X=8) = \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{\binom{8}{4}}{\binom{12}{4}} \cdot \frac{4}{8} +$$

$$+ \frac{\binom{8}{7}}{\binom{12}{7}} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{33} + \frac{8!\ 8!}{4! \cdot 12!} \cdot \frac{1}{2} + \frac{8! \cdot 5!}{12!} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{33} + \frac{7}{99} + \frac{4}{495} = \frac{53}{165}$$

$$P(\text{κερδίζει ο } \Gamma) = 1 - P(\text{κερδίζει ο } A) - P(\text{κερδίζει ο } B) = \frac{7}{33}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ψάχνουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου που περιγράφεται από την αλληλουχία ρίψεων: $\underbrace{\_\ \_\ \_ \ldots \_}_{\substack{2 \text{ εξάρια και} \\ K \text{ μη-εξάρια και μη-πεντάρια}}}\ \underline{5}$

Κάθε τέτοια αλληλουχία έχει πιθανότητα: $\underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)}_{\substack{\text{από το} \\ \text{πεντάρι}}}\underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^{2}}_{\substack{\text{από} \\ \text{εξάρια}}}\underbrace{\left(\frac{4}{6}\right)^{K}}_{\substack{\text{από τα μη-πεντάρια} \\ \text{και μη-εξάρια}}}$

ενώ το πλήθος τους καθορίζεται από τις θέσεις των 2 εξαριών στις πρώτες $(K+2)$ ρίψεις, δηλαδή είναι ίσο με $\binom{K+2}{2}$. Επίσης, το K μπορεί να έχει οποιαδήποτε μη-αρνητική ακέραια τιμή. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με:

$$P = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\binom{k+2}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{4}{6}\right)^k\right] = \frac{1}{2\cdot 6^3}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+1)(k+2)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k\right] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 6^3}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k^2+3k+2)\left(\frac{2}{3}\right)^k\right] = \frac{1}{2\cdot 6^3}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[k^2\left(\frac{2}{3}\right)^k\right] + 3\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left[k\left(\frac{2}{3}\right)^k\right] + 2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 6^3}\left\{\frac{\frac{2}{3}\left(1+\frac{2}{3}\right)}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^3} + 3\cdot\frac{2/3}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} + 2\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right\} = \frac{1}{8}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Το πεδίο τιμών της X είναι το $\{0, 1, 2, \ldots\}$

$$f_X(0) = P(X=0) = P(\underbrace{K\,K\,K\ldots K}_{10\ K,\ 0\Gamma}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

για $X=1$ έχουμε: $\underbrace{\_\ \_\ \ldots\ \_}_{9K,\ 1\Gamma}\ K$, όπου το πλήθος όλων των διαφορετικών διατάξεων είναι ίσο με $\frac{10!}{9!\cdot 1!} = \binom{10}{1}$

Άρα: $f_X(1) = P(X=1) = \binom{10}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{11}$

Γενικά, για $X=m$ (με $m=0,1,2\ldots$), έχουμε $\underbrace{\_\ \_\ \ldots\ \_}_{9K,\ m\Gamma}\ K$

και το πλήθος των διαφορετικών διατάξεων είναι ίσο με $\frac{(m+9)!}{9!\,m!} = \binom{m+9}{m}$

Άρα: $f_X(m) = P(X=m) = \binom{m+9}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+10}$

<u>2ος Τρόπος:</u> Θεωρούμε τις διαδοχικές ρίψεις ως ακολουθία δοκιμών Bernoulli με "επιτυχία" $=K$, "αποτυχία" $=\Gamma$ και $p=P(K)=1/2$.

Τότε η $X = \#\Gamma$ έως 10η "επιτυχία", η οποία ακολουθεί αρνητική διωνυμική κατανομή με $\left\{\begin{matrix}\alpha=10\\ p=1/2\end{matrix}\right\}$, δηλ. $P(X=m) = \binom{\alpha+m-1}{m}p^{\alpha}(1-p)^m = \binom{m+9}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+10}$

ΑΣΚΗΣΗ 4

α) Από τις ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιεί μια συνάρτηση πυκνότητας διακριτής τυχαίας μεταβλητής, έχουμε:

(i) $f(k) \geq 0 \Rightarrow \frac{c}{3^k} \geq 0$ για $k=0,1,\ldots$, άρα $c \geq 0$

(ii) $\{k : f(k) \neq 0\} = \{0,1,2,\ldots\}$ αριθμήσιμα άπειρο υποσύνολο του R (ισχύει εξ' ορισμού)

(iii) $\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c}{3^k} = 1 \Rightarrow c = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}\right]^{-1} \Rightarrow c = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k\right]^{-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow c = \left(\frac{1}{1-1/3}\right)^{-1} \Rightarrow c = \frac{2}{3}$$

β) Συνάρτηση πυκνότητας: $f_X(k) = \begin{cases} \frac{2/3}{3^k} = \frac{2}{3^{k+1}} & , k=0,1,2,\ldots \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$

Άρα, η συνάρτηση κατανομής της X θα είναι: $F_X(t) = P(X \leq t) =$

$$= \sum_{k=-\infty}^{[t]} f_X(k) = \begin{cases} 0 & , \text{ για } t<0 \\ \sum_{k=0}^{[t]} \frac{2}{3^{k+1}} & , \text{ για } t \geq 0 \end{cases}$$

Όμως: $\sum_{k=0}^{[t]} \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{[t]} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{2}{3} \frac{1-(1/3)^{[t]+1}}{1-(1/3)} = 1 - \frac{1}{3^{[t]+1}}$

Άρα: $F_X(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ για } t<0 \\ 1 - \frac{1}{3^{[t]+1}} & , \text{ για } t \geq 0 \end{cases}$

γ) $P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) = 1 - 2/3 = 1/3$

$P(X = \text{άρτιος}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=2k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3^{2k+1}} = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^2}\right)^k = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^k = \frac{2/3}{1-1/9} = \frac{3}{4}$

$P(X = \text{περιττός}) = 1 - P(X = \text{άρτιος}) = 1/4$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Διαμέριση: $\begin{cases} 94 \text{ μη-χαλασμένα αυγά} \\ 6 \text{ χαλασμένα} \end{cases}$

Τότε $$f_X(k) = P(X=k) = \begin{cases} \dfrac{\binom{6}{k}\binom{94}{10-k}}{\binom{100}{10}}, & k=0,1,2,\dots,6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \sum_{k=0}^{[t]} \dfrac{\binom{6}{k}\binom{94}{10-k}}{\binom{100}{10}}, & 0 \leq t \leq 6 \\ 1, & t>6 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

$$f(k) = P(X=k) = \begin{cases} (1-p)^k p, & k=0,1,2,\dots \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$F(t) = P(X \leq t) = \sum_{k \leq t} P(X=k) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1-(1-p)^{[t]+1}, & t \geq 0 \end{cases}$$

α) (i) $P(X>3) = 1-P(X\leq 3) = 1-F(3) = (1-p)^4$

(ii) $P[(4 \leq X \leq 7) \cup (X>9)] = P(4\leq X\leq 7) + P(X>9) = P(3<X\leq 7) +$
$+ [1-P(X\leq 9)] = F(7)-F(3)+1-F(9) = 1-(1-p)^8 - 1 + (1-p)^4 + 1 -$
$-1+(1-p)^{10} = (1-p)^4 - (1-p)^8 + (1-p)^{10}$

(iii) $P[(3\leq X\leq 5) \cup (7\leq X\leq 10)] = P(3\leq X\leq 5) + P(7\leq X\leq 10) =$
$= P(2<X\leq 5) + P(6<X\leq 10) = F(5)-F(2)+F(10)-F(6) =$
$= (1-p)^3 - (1-p)^6 + (1-p)^7 - (1-p)^{11}$

β) iv) $$f_{X^2}(k) = P(X^2=k) = \begin{cases} P(X=\sqrt{k}) = (1-p)^{\sqrt{k}} p, & k=0,1,4,9,16,25,\dots \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

v) $f_{X+3}(k) = P(X+3=k) = P(X=k-3) = \begin{cases} (1-p)^{k-3}p & , k=3,4,5,\dots \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$

ΑΣΚΗΣΗ 7

X_i = ένδειξη βόλου στην i επιλογή, $X = \max(X_1, X_2)$

α) $P(X \le t) = P(\max(X_1, X_2) \le t) = P(X_1 \le t, X_2 \le t) = P(X_1 \le t) \cdot P(X_2 \le t)$

Όμως, $P(X_i = k) = f(k) = \begin{cases} 1/12 & , k=1,2,\dots,12 \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$ για $i=1,2,\dots$

Άρα: $P(X_i \le t) = \sum_{k \le t} f(k) = \begin{cases} 0 & , t<1 \\ \sum_{k=1}^{[t]} \frac{1}{12} = \frac{[t]}{12} & , 1 \le t \le 12 \\ 1 & , t>12 \end{cases}$

Επομένως: $P(X \le t) = \begin{cases} 0, & t<1 \\ \frac{[t]^2}{144}, & 1 \le t \le 12 \\ 1, & t>12 \end{cases}$

Όμως, $1+3+5+\dots+2n-1 = n^2 \Rightarrow n^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

Άρα: $[t]^2 = \sum_{k=1}^{[t]}(2k-1)$, οπότε $P(X \le t) = \sum_{k=1}^{[t]} \frac{2k-1}{144}$ για $1 \le t \le 12$

Το οποίο συνεπάγεται $P(X=k) = \begin{cases} \frac{2k-1}{144} & , k=1,2,\dots,12 \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$

β) $P(X \le t) = P(\max(X_1, X_2) \le t) = P(X_1 \le t, X_2 \le t) = P(X_1 \le t) \cdot P(X_2 \le t \setminus X_1 \le t)$

από το ερώτημα (α) έχουμε: $P(X_1 \le t) = \frac{[t]}{12}$ για $1 \le t \le 12$

και $P(X_1 \le t) = 0$ για $t<1$, $P(X_1 \le t) = 1$ για $t>12$

$P(X_2 \le t \setminus X_1 \le t) = \begin{cases} 0, & \text{για } t<2 \\ \sum_{k=1}^{[t]-1} 1/11 = \frac{[t]-1}{11}, & \text{για } 2 \le t \le 12 \\ 1, & \text{για } t>12 \end{cases}$

Άρα: $P(X\le t)=\begin{cases}0, & \text{για } t<2\\ \dfrac{[t]([t]-1)}{12\cdot 11}, & \text{για } 2\le t\le 12\\ 1, & \text{για } t>12\end{cases}$

Επειδή $\dfrac{n(n+1)}{2}=1+2+3+\ldots+n=\sum_{i=1}^{n} i$ όπου n θετικός ακέραιος

Προκύπτει ότι: $([t]-1)[t]=2\sum_{i=1}^{[t]-1} i = 2\sum_{k=2}^{[t]}(k-1)$

Άρα, για $2\le t\le 12$: $P(X\le t)=\dfrac{2\sum_{k=2}^{[t]}(k-1)}{12\cdot 11}=\dfrac{\sum_{k=2}^{[t]}(k-1)}{\frac{(12)_2}{2!}}=\sum_{k=2}^{[t]}\dfrac{k-1}{\binom{12}{2}}$

Επομένως: $P(X=k)=\begin{cases}\dfrac{k-1}{\binom{12}{2}}, & \text{για } k=2,3,\ldots,12\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Το πεδίο τιμών της Y είναι: $\{0,1,2,\ldots,M\}$

$P(Y=k)=P(\min(X,M)=k)=\begin{cases}P(X=k), & k=0,1,\ldots,M-1\\ P(\min(X,M)=M)=P(X\ge M), & k=M\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$

Όμως: $P(X=k)=(1-p)^k p$ για $k=0,1,\ldots$

και $P(X\ge M)=1-P(X<M)=1-P(X\le M-1)=1-F_X(M-1)=(1-p)^M$

Άρα $f_Y(k)=P(Y=k)=\begin{cases}(1-p)^k p, & k=0,1,\ldots,M-1\\ (1-p)^M, & k=M\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$

ΑΣΚΗΣΗ 9

p_i = πιθανότητα να χτυπήσει μια βολή στη ζώνη i

Τότε $p_i = \dfrac{\text{εμβαδόν ζώνης } i}{\text{εμβαδόν στόχου}} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = \dfrac{\pi(1/3)^2}{\pi(1)^2} = \dfrac{1}{9} \\ p_2 = \dfrac{\pi(1/2)^2 - \pi(1/3)^2}{\pi(1)^2} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{5}{36} \\ p_3 = \dfrac{\pi(1)^2 - \pi(1/2)^2}{\pi(1)^2} = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

A_i = {κατάληξη βολής στη ζώνη i}

δηλ. $P(A_i) = p_i$ με $i = 1,2,3$

$\underbrace{A_1 A_2 A_3}$ = {1η βολή στη ζώνη 1, 2η στη ζώνη 2, 3η στη ζώνη 3}

3! διαφορετικές διατάξεις με πιθανότητα καθεμιάς $P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $3!\,P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) =$

$= 3!\,\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{5}{36}\cdot\dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{72}$

2ος Τρόπος:

X_i = # βολών στη ζώνη i, όπου $i = 1,2,3$

3 ανεξάρτητες δοκιμές με 3 δυνατά αποτελέσματα

οπότε οι X_1, X_2, X_3 ακολουθούν πολυωνυμική πυκνότητα

με παραμέτρους $n = 3$, $p_1 = \dfrac{1}{9}$, $p_2 = \dfrac{5}{36}$, $p_3 = \dfrac{3}{4}$

Άρα $P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3) = f(k_1, k_2, k_3) = \dfrac{3!}{k_1!\cdot k_2!\cdot k_3!}\, p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} =$

$$= \frac{3!}{k_1!\cdot k_2!\cdot k_3!}\left(\frac{1}{9}\right)^{k_1}\left(\frac{5}{36}\right)^{k_2}\left(\frac{3}{4}\right)^{k_3}$$

Επομένως, ζητάμε την $f(1,1,1) = \dfrac{3!}{1!\,1!\,1!}\left(\dfrac{1}{9}\right)\left(\dfrac{5}{36}\right)\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{5}{72}$