

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Πιθανότητες» (EM161) – Εαρινό Εξάμηνο 2004-2005
Διδάσκων Ι. Τσαγράκης

6^ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Σε ένα δοχείο έχετε 12 βόλους από τους οποίους 4 είναι άσπροι. Τρεις παίχτες, οι Α, Β και Γ τραβάνε διαδοχικά βόλους από το δοχείο (πρώτα ο Α, μετά ο Β, μετά ο Γ, μετά ο Α, μετά ο Β, κ.ο.κ.). Κερδίζει όποιος τραβήξει πρώτος άσπρο βόλο. Βρείτε την πιθανότητα να κερδίσει κάθε παίχτης:

- α) αν κάθε βόλος, μετά που θα τραβηχτεί από κάποιο παίχτη, επανατοποθετείται στο δοχείο,
β) αν οι βόλοι που διαλέγονται δεν επανατοποθετούνται.

Άσκηση 2: Σε διαδοχικές ρίψεις ζαριού ποια είναι η πιθανότητα να έρθουν 2 εξάρια (όχι κατ' ανάγκη συνεχόμενα) πριν να εμφανιστεί πεντάρι;

Άσκηση 3: Ρίχνετε ένα αμερόληπτο νόμισμα μέχρι να εμφανιστεί κεφαλή για 10^n φορές. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που μετρά το πλήθος των γραμμμάτων που εμφανίζονται πριν εμφανιστεί η 10^n κεφαλή. Ποια είναι η συνάρτηση πυκνότητας f_X της X ;

Άσκηση 4: Η τυχαία μεταβλητή X παίρνει τις τιμές: 0, 1, 2, ..., με πιθανότητες

$$P(X = k) = \frac{c}{3^k}, \quad \text{για } k = 0, 1, 2, \dots$$

- Βρείτε: α) τη σταθερά c
β) τη συνάρτηση κατανομής της X
γ) τις πιθανότητες $P(X \geq 1)$, $P(X = \text{άρτιος})$, $P(X = \text{περιττός})$

Άσκηση 5: Σε ένα καλάθι με 100 αυγά τα 6 είναι χαλασμένα. Διαλέγετε τυχαία 10 αυγά. Έστω X το πλήθος των χαλασμένων αυγών που υπάρχουν ανάμεσα στα 10 που διαλέξατε. Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας και τη συνάρτηση κατανομής της X .

Άσκηση 6: Υποθέτουμε ότι η X έχει γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p . Υπολογίστε:

- (α) τις πιθανότητες των εξής ενδεχομένων: (i) $X > 3$, (ii) $4 \leq X \leq 7$ ή $X > 9$, (iii) $3 \leq X \leq 5$ ή $7 \leq X \leq 10$.
(β) την πυκνότητα των (iv) X^2 και (v) $X + 3$.

Άσκηση 7: Ένα δοχείο περιέχει 12 βόλους με τους αριθμούς 1,2,...,12. Κάνουμε δύο δοκιμές του πειράματος της τυχαίας επιλογής ενός βόλου από το δοχείο. Έστω X η μεγαλύτερη από τις ενδείξεις στους βόλους που επιλέξαμε. Υπολογίστε την πυκνότητα της X αν οι βόλοι επιλέγονται

- (α) με επανατοποθέτηση (ανεξάρτητες δοκιμές)
(β) χωρίς επανατοποθέτηση.

Άσκηση 8: Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p . Θέτουμε $Y = X$ αν $X < M$ και $Y = M$ αν $X \geq M$. Δηλαδή, $Y = \min(X, M)$, όπου M μια θετική ακέραια σταθερά. Υπολογίστε την πυκνότητα της Y .

Άσκηση 9: Ένας κυκλικός στόχος χωρίζεται σε 3 ζώνες με 3 ομόκεντρους κύκλους ακτινών $1/3$, $1/2$ και 1, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν επιχειρήσουμε 3 τυχαίες βολές προς το στόχο, ποια είναι η πιθανότητα να καταλήξει ακριβώς μια βολή σε κάθε ζώνη;

