ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ (ΕΜ 161)

ΣΥΝΤΟΜΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ 4ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

α) Η λέξη "ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ" έχει συνολικά 10 γράμματα. Αν όλα τα γράμματα ήταν διαφορετικά θα είχαμε 10! αναγραμματισμούς. Όμως, τα 2 "Α" και τα 3 "Λ" μετατίθενται κατά 2! και 3! τρόπους, αντίστοιχα, δίνοντας την ίδια λέξη. Άρα συνολικά έχουμε $\frac{10!}{2!\,3!} = 302400$ διαφορετικούς αναγραμματισμούς.

β) Αν το "Π" είναι πρώτο, τότε μένουν 9 γράμματα από τα οποία 2 είναι "Α" και 3 είναι "Λ". Άρα, συνολικά έχουμε $\frac{9!}{2!\,3!} = 30240$ διαφορετικούς αναγραμματισμούς.
Αν το "Λ" είναι πρώτο, τότε μένουν 9 γράμματα από τα οποία 2 είναι "Α" και 2 είναι "Λ". Άρα, συνολικά έχουμε $\frac{9!}{2!\,2!} = 90720$ διαφορετικούς αναγραμματισμούς.

ΑΣΚΗΣΗ 2

α) $\left.\begin{array}{ccc} \underline{\text{Προεδρ.}} & \underline{\text{Αντιπρ.}} & \underline{\text{Γραμμ.}} \\ 10 \text{ επιλογές} & 9 \text{ επιλογές} & 8 \text{ επιλογ.} \end{array}\right\} \Rightarrow 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ τρόποι

2ος τρόπος λύσης: Επιλογή διατεταγμένων 3άδων από σύνολο πλήθους 10 χωρίς επανατοποθέτηση. Άρα, υπάρχουν $(10)_3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ τρόποι επιλογής

β) Διακρίνω τις περιπτώσεις: (i) ούτε ο Α, ούτε ο Β στην επιτροπή, (ii) μόνον Α στην επιτροπή, και (iii) μόνον ο Β. Στην (i) έχαμε επιλογή διατεταγμένων 3άδων από το σύνολο των υπόλοιπων 8 ατόμων χωρίς επανατοποθέτηση και άρα, υπάρχουν $(8)_3$ τρόποι επιλογής. Στην (ii) ο Α έχει 3 επιλογές και διαλέγω διατεταγμένες 2άδες από τους υπόλοιπους 8 για τις θέσεις που απομένουν, και άρα υπάρχουν $3\cdot(8)_2$ τρόποι επιλογής. Ομοίως, για την (iii), υπάρχουν $3\cdot(8)_2$ τρόποι επιλογής. Επομένως, συνολικά έχουμε: $(8)_3 + 3\cdot(8)_2 + 3\cdot(8)_2 = (8)_2\cdot[6+3+3] = 8\cdot7\cdot12 = 672$ τρόπους επιλογής.

γ) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: (i) ούτε ο Γ, ούτε ο Δ στην επιτροπή και (ii) και ο Γ και ο Δ στην επιτροπή. Για την (i), ομοίως με την περίπτωση (i) του ερωτήματος (β) έχουμε $(8)_3$ τρόπους επιλογής. Για την (ii) έχουμε 8 επιλογές για τον τρίτο της επιτροπής και όλοι μαζί (Γ, Δ και τρίτος) μπορούν να διαταχθούν με 3! τρόπους σε (πρόεδρο, αντιπρόεδρο, γραμματέα), και άρα υπάρχουν $8\cdot3!$ τρόποι επιλογής. Επομένως, συνολικά έχουμε: $(8)_3 + 8\cdot3! = 384$ τρόπους επιλογής.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Μια 4-μελής επιτροπή είναι μη-διατεταγμένη 4άδα. Δηλαδή ζητάμε το πλήθος των μη-διατεταγμένων 4άδων από σύνολο 15 ατόμων χωρίς επανατοποθέτηση, το οποίο ισούται με $\binom{15}{4} = \frac{15!}{4!\,11!} = 1365$.

Αν όμως επιλέγουμε πρόεδρο, αντιπρόεδρο, γραμματέα και ταμία, η 4άδα είναι διατεταγμένη και υπάρχουν $(15)_4 = 15\cdot14\cdot13\cdot12 = 32760$ δυνατοί τρόποι.

ΑΣΚΗΣΗ 4

α) Υπάρχουν $\binom{4}{1}$ επιλογές για ακριβώς 1 άσσο για τον Α. Για κάθε μία από αυτές, υπάρχουν $\binom{48}{12}$ επιλογές για τα υπόλοιπα χαρτιά του Α. Για κάθε δυνατή 13άδα χαρτιών του Α, μένουν $\binom{39}{13}$ επιλογές για τα χαρτιά του Β και $\binom{26}{13}$ επιλογές για τα χαρτιά του Γ, ενώ όλα τα υπόλοιπα 13 χαρτιά πάνε στον Δ κατά $\binom{13}{13}=1$ τρόπο.

Άρα, συνολικά έχουμε $\binom{4}{1}\binom{48}{12}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$ τρόπους επιλογής.

β) Υπάρχουν $\binom{4}{2}$ επιλογές για ακριβώς 2 άσους για τους Α και Β μαζί. Για καθεμιά από αυτές υπάρχουν $\binom{48}{24}$ επιλογές για τα υπόλοιπα χαρτιά των Α και Β μαζί. Για κάθε τέτοια δυνατή 26άδα χαρτιών, έχουμε $\binom{26}{13}\binom{13}{13}$ τρόπους μοιράσματος στους Α και Β, και $\binom{26}{13}\binom{13}{13}$ τρόπους μοιράσματος των υπόλοιπων 26 χαρτιών στους Γ και Δ.

Άρα, συνολικά έχουμε $\binom{4}{2}\binom{48}{24}\binom{26}{13}\binom{26}{13}$ τρόπους επιλογής.

ΑΣΚΗΣΗ 5

α) Κάθε γλυκό μπορεί να πάει σε οποιοδήποτε από τα 5 παιδιά. Άρα κάθε γλυκό μπορούμε να το φανταστούμε σαν επιλογή ενός από τα 5 παιδιά με επανατοποθέτηση. Άρα, συνολικά υπάρχουν 5^{10} τρόποι μοιράσματος των γλυκών χωρίς περιορισμούς

β) Το πρώτο παιδί επιλέγει με $\binom{10}{2}$ τρόπους 2 γλυκά, το δεύτερο επιλέγει με $\binom{8}{2}$ τρόπους 2 γλυκά από τα υπόλοιπα 8, το τρίτο με $\binom{6}{2}$ τρόπους από τα υπόλοιπα 6 και το τέταρτο με $\binom{4}{2}$ τρόπους από τα υπόλοιπα 4, ενώ το πέμπτο παίρνει τα 2 γλυκά που απομένουν κατά $\binom{2}{2}=1$ τρόπο. Άρα συνολικά υπάρχουν $\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}=$

$$= \binom{10}{2,2,2,2,2} = \frac{10!}{(2!)^5}$$ τρόποι μοιράσματος έτσι ώστε κάθε παιδί να πάρει 2 γλυκά.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Αν απλά πρέπει να απαντήσει σε 7 από τις 10, τότε έχει $\binom{10}{7}$ επιλογές για την 7άδα ερωτήσεων που θα απαντήσει.

Αν πρέπει τουλάχιστον οι 4 να είναι από τις πρώτες 6, τότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις: (i) επιλέγει 4 από τις 6 πρώτες και 3 από τις υπόλοιπες 4.
(ii) επιλέγει 5 » » 6 » και 2 » » » 4.
(iii) » 6 » » 6 » και 1 » » » 4.

Στην (i) έχει $\binom{6}{4}$ επιλογές για τις 4 που ανήκουν στις 6 πρώτες ερωτήσεις, και για κάθε τέτοια επιλογή, έχει $\binom{4}{3}$ επιλογές για τις υπόλοιπες 3, και άρα έχει $\binom{6}{4}\binom{4}{3}$ επιλογές στην περίπτωση (i). Αντίστοιχα έχει $\binom{6}{5}\binom{4}{2}$ και $\binom{6}{6}\binom{4}{1}$ επιλογές για τις περιπτώσεις (ii) και (iii). Επομένως, συνολικά έχει $\binom{6}{4}\binom{4}{3}+\binom{6}{5}\binom{4}{2}+\binom{6}{6}\binom{4}{1}=100$ επιλογές

ΑΣΚΗΣΗ 7

Αν από ένα σύνολο με N στοιχεία, επιλέξουμε ένα υποσύνολο με K μη-διατεταγμένα στοιχεία, τότε αυτομάτως έχουμε επιλέξει και ένα υποσύνολο με τα υπόλοιπα $N-K$ μη-διατεταγμένα στοιχεία.

ΑΣΚΗΣΗ 8

α) Υπάρχουν $\binom{6}{3}$ τρόποι να επιλέξουμε μια 3άδα παντρεμένων γυναικών και $\binom{4}{3}$ τρόποι να επιλέξουμε μια 3άδα παντρεμένων αντρών. Για κάθε τέτοια εξάδα (3 γυναίκες + 3 άντρες) μπορούμε να έχουμε $\left[\ \frac{\text{Γυναίκα 1}}{3 \text{ επιλογές}} \quad \frac{\text{Γυναίκα 2}}{2 \text{ επιλογές}} \quad \frac{\text{Γυναίκα 3}}{1 \text{ επιλογή}}\ \right]$, δηλ. $3\cdot 2\cdot 1=3!$ δυνατά ζευγάρια (είναι σαν να έχουμε μια 3άδα αντικειμένων που θέλουμε να αντιστοιχίσουμε σε μια 3άδα θέσεων έτσι ώστε κάθε θέση να έχει 1 ακριβώς αντικείμενο). Άρα: $\binom{6}{3}\binom{4}{3}3!=480$

β) Υπάρχουν $\binom{6}{4}$ τρόποι να επιλέξουμε μια 4άδα παντρεμένων γυναικών και $\binom{4}{4}=1$ τρόπος να επιλέξουμε 4άδα παντρεμένων αντρών. Για κάθε τέτοια εξάδα (4 γυναίκες + 4 άντρες) μπορούμε να έχουμε $4!$ δυνατά ζευγάρια. Άρα: $\binom{6}{4}\binom{4}{4}4!=360$ τρόποι

ΑΣΚΗΣΗ 9

Έστω ότι έχουμε $2n$ άτομα από τα οποία n είναι γυναίκες και n είναι άντρες. Αν θέλουμε να διαλέξουμε μια τυχαία n-άδα ατόμων, τότε αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{2n}{n}$ τρόπους, οι οποίοι μπορούν να αναλυθούν στα εξής ενδεχόμενα: είτε διαλέγω n άντρες και 0 γυναίκες [δηλ. $\binom{n}{n}\cdot\binom{n}{0}$ επιλογές], είτε διαλέγω $n-1$ άντρες και 1 γυναίκα [δηλ. $\binom{n}{n-1}\cdot\binom{n}{1}$ επιλογές], είτε διαλέγω $n-2$ άντρες και 2 γυναίκες [δηλ. $\binom{n}{n-2}\cdot\binom{n}{2}$ επιλογές] κ.ο.κ.

Άρα
$$\binom{2n}{n}=\binom{n}{n}\cdot\binom{n}{0}+\binom{n}{n-1}\cdot\binom{n}{1}+\binom{n}{n-2}\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{0}\cdot\binom{n}{n}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$
, η οποία, επειδή $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, δίνει
$$\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Σημείωση: έχουμε δει ένα συνδυαστικό επιχείρημα στη θεωρία: Διαλέγουμε τυχαία μια επιτροπή k ατόμων με έναν πρόεδρο, από ένα πληθυσμό n ατόμων και ζητούμε το πλήθος των τρόπων που υπάρχουν για να φτιάξουμε την επιτροπή.

$$\underbrace{\binom{n}{k}k}_{\text{διαλέγουμε πρώτα τα } k \text{ άτομα για την επιτροπή και μετά τον πρόεδρο από αυτά τα } k \text{ άτομα}} = \underbrace{n\binom{n-1}{k-1}}_{\text{διαλέγουμε πρώτα τον πρόεδρο της επιτροπής από τα } n \text{ άτομα και μετά τα υπόλοιπα } k-1 \text{ μέλη της επιτροπής από τα υπόλοιπα } n-1 \text{ άτομα}} = \underbrace{\binom{n}{k-1}(n-k+1)}_{\text{διαλέγουμε πρώτα τα } k-1 \text{ μέλη της επιτροπής από τα } n \text{ άτομα και μετά τον πρόεδρο από τα υπόλοιπα } n-k+1 \text{ άτομα.}}$$

2ος Τρόπος: $k\binom{n}{k}=k\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}=\dfrac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$

$$n\binom{n-1}{k-1} = n\,\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k-1}(n-k+1) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}(n-k+1) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 11}}$

Έχουμε $\binom{13}{2}$ επιλογές για τα καρό, $\binom{13}{1}$ επιλογές για την κούπα και $\binom{13}{2}$ επιλογές για τα μπαστούνια. Επομένως, υπάρχουν συνολικά $\binom{13}{2}\cdot\binom{13}{1}\cdot\binom{13}{2} = 79092$