# ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ (ΕΜ 161)

## ΣΥΝΤΟΜΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥ 2ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

### ΑΣΚΗΣΗ 1

$A_i = \{$επιλογή του βώλου $i$ στην 1η προσπάθεια$\}$

$B_i = \{$επιλογή του βώλου $i$ στη 2η προσπάθεια$\}$

$P($διαφέρουν κατά 2 ή περισσότερες μονάδες$) = 1 - P($διαφέρουν κατά 1$) =$

$$= 1 - P\left[\bigcup_{i=1}^{9}(A_i \cap B_{i+1}) \cup \bigcup_{i=2}^{10}(A_i \cap B_{i-1})\right] =$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{9} P(A_i \cap B_{i+1}) - \sum_{i=2}^{10} P(A_i \cap B_{i-1}) =$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{9} P(A_i) P(B_{i+1} \setminus A_i) - \sum_{i=2}^{10} P(A_i) P(B_{i-1} \setminus A_i) =$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{9}\left(\frac{1}{10}\frac{1}{9}\right) - \sum_{i=2}^{10}\left(\frac{1}{10}\frac{1}{9}\right) = 1 - \cancel{9}\left(\frac{1}{10}\frac{1}{\cancel{9}}\right) - \cancel{9}\left(\frac{1}{10}\frac{1}{\cancel{9}}\right) =$$

$$= 1 - \frac{2}{10} = \frac{4}{5}$$

### ΑΣΚΗΣΗ 2

$A_i = \{$επιλογή του κομοδίνου $i\}$ οπότε $P(A_i) = 1/4$ με $i = 1,2,3,4$

$X = \{$επιλογή συρταριού με χρυσό νόμισμα$\}$

Από τα δεδομένα της άσκησης προκύπτει ότι:

$P(X \setminus A_1) = 1/2$, $P(X \setminus A_2) = 1/2$, $P(X \setminus A_3) = 1$, $P(X \setminus A_4) = 0$

α) $$P(A_1 \cup A_2 \setminus X) = \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap X)}{P(X)} = \frac{P[(A_1 \cap X) \cup (A_2 \cap X)]}{P(X)} =$$

$$= \frac{P(A_1 \cap X) + P(A_2 \cap X)}{P(X)} = \frac{P(A_1)P(X \setminus A_1) + P(A_2)P(X \setminus A_2)}{P\left[\bigcup_{i=1}^{4}(X \cap A_i)\right]} =$$

$$= \frac{P(A_1)P(X\setminus A_1) + P(A_2)P(X\setminus A_2)}{\sum_{i=1}^{4} P(X\cap A_i)} = \frac{P(A_1)P(X\setminus A_1) + P(X\setminus A_2)}{\sum_{i=1}^{4} P(A_i)P(X\setminus A_i)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 0} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

β) $$P(A_3\setminus X) = \frac{P(A_3\cap X)}{P(X)} = \frac{P(A_3)P(X\setminus A_3)}{\sum_{i=1}^{4} P(A_i)P(X\setminus A_i)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot 1}{1/2} = 1/2$$

## ΑΣΚΗΣΗ 3

$\Sigma$ = {σωστή απάντηση σε δεδομένο ερώτημα}

$\Gamma$ = {ο φοιτητής γνωρίζει την απάντηση}

$\Delta$ = {ο φοιτητής δεν γνωρίζει την απάντηση}

α) $$P(\Sigma) = P(\Sigma\cap\Gamma) + P(\Sigma\cap\Delta) = P(\Sigma\setminus\Gamma)P(\Gamma) + P(\Sigma\setminus\Delta)P(\Delta) =$$

$$= 1\cdot\frac{7}{10} + \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{10} = \frac{19}{25}$$

β) $$P(\Gamma\setminus\Sigma) = \frac{P(\Gamma\cap\Sigma)}{P(\Sigma)} = \frac{P(\Sigma\setminus\Gamma)P(\Gamma)}{P(\Sigma)} = \frac{1\cdot\frac{7}{10}}{19/25} = \frac{35}{38}$$

## ΑΣΚΗΣΗ 4

$A_i$ = {κατασκευή υπολογιστή τη μέρα $i$} με $i=1$ για Δευτέρα, $i=2$ για Τρίτη, κ.ο.κ.

$E$ = {κατασκευή ενός ελαττωματικού υπολογιστή}

$$P(A_1\setminus E) = \frac{P(A_1\cap E)}{P(E)} = \frac{P(E\setminus A_1)P(A_1)}{P(E)} \qquad (1)$$

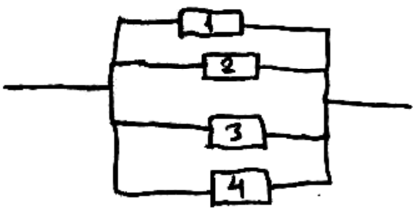
Όμως: $P(E|A_1)\,P(A_1) = \frac{4}{100}\,\frac{1}{5} = \frac{4}{500}$

και $P(E) = P\left(\bigcup_{i=1}^{5}(E\cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{5} P(E\cap A_i) = \sum_{i=1}^{5} P(A_i)\,P(E|A_i) =$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{4}{100} + 3\,\frac{1}{100} + \frac{2}{100}\right] = \frac{9}{500}$$

Άρα: $P(A_1|E) = \dfrac{4/500}{9/500} = \dfrac{4}{9}$

## ΑΣΚΗΣΗ 5




$A_i = \{$λειτουργία μηχανήματος $i\}$

Ζητούμε να λειτουργεί τουλάχιστον ένα εκ των 4 μηχανημάτων

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i^c\right) = 1 - P(A_1^c)\,P(A_2^c)\,P(A_3^c)\,P(A_4^c) =$$

$$= 1 - [1-P(A_1)]\,[1-P(A_2)]\,[1-P(A_3)]\,[1-P(A_4)] =$$

$$= 1 - (0.9)\cdot(0.8)\cdot(0.7)\cdot(0.6) = 0.6976$$

## ΑΣΚΗΣΗ 6

Ακολουθία δοκιμών Bernoulli με $\begin{cases} \text{"επιτυχία"} = [\text{εμφάνιση πελάτη}] \\ \text{"αποτυχία"} = [\text{μη-εμφάνιση πελάτη}] \end{cases}$

με πιθανότητα επιτυχίας $p = \frac{80}{100} = 4/5$, πλήθος δοκιμών $n = 52$

$B_k = \{$εμφάνιση $k$ ακριβώς πελατών$\}$

$$P(B_k) = \binom{52}{k} p^k (1-p)^{52-k}$$

$P(\text{τακτοποιηθούν όλοι}) = 1 - P(\text{εμφανίζονται 51 ή 52 πελάτες}) =$

$$= 1 - P(B_{51} \cup B_{52}) = 1 - P(B_{51}) - P(B_{52}) =$$

$$= 1 - \binom{52}{51} p^{51}(1-p) - \binom{52}{52} p^{52}(1-p)^0 =$$

$$= 1 - 52p^{51}(1-p) - p^{52} = 1 - p^{51}\left[52(1-p) + p\right] =$$

$$= 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{51}\left(\frac{52}{5} + \frac{4}{5}\right) = 1 - \frac{56}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{51}$$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 7}}$

Ακολουθία $n=5$ δοκιμών Bernoulli με $\begin{cases} \text{"επιτυχία"} = \text{εμφάνιση άσου} \\ \text{"αποτυχία"} = \text{μη-εμφάνιση άσου} \end{cases}$

με πιθανότητα "επιτυχίας" $p = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

$B_k = \{\text{εμφάνιση άσου } k \text{ ακριβώς φορές}\}$

$$P(B_k) = \binom{5}{k} p^k (1-p)^{5-k} = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{13}\right)^k\left(\frac{12}{13}\right)^{5-k}$$

$$P\left(B_2 \setminus \bigcup_{i=1}^{5} B_k\right) = \frac{P\left(B_2 \cap \bigcup_{i=1}^{5} B_k\right)}{P\left(\bigcup_{i=1}^{5} B_k\right)} = \frac{P(B_2)}{1 - P(B_0)} = \frac{\binom{5}{2}\left(\frac{1}{13}\right)^2\left(\frac{12}{13}\right)^3}{1 - \binom{5}{0}\left(\frac{1}{13}\right)^0\left(\frac{12}{13}\right)^5} =$$

$$= \frac{\frac{5!}{2!\,3!}\left(\frac{1}{13}\right)^2\left(\frac{12}{13}\right)^3}{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^5} = \frac{10 \cdot 12^3}{13^5 - 12^5}$$