ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Πιθανότητες» (ΕΜ161) – Εαρινό Εξάμηνο 2004-2005

Διδάσκων Ι. Τσαγράκης

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ 1^{ΟΥ} ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

Άσκηση 1: Τα γεγονότα *Α*, *Β* και *Γ* περιγράφονται από τα ακόλουθα σύνολα:

A = {(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5)}

B = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)}

$Γ$ = {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}

Οπότε:

$A \cap B$ = {το άθροισμα των ζαριών είναι περιττό & τουλάχιστον ένα από τα δύο είναι άσος} =
= {(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (4, 1), (6, 1)}

$A \cup B$ = { το άθροισμα των ζαριών είναι περιττό ή τουλάχιστον ένα από τα δύο είναι άσος} =
= {(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5), (1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (5, 1)}

$B \cap \Gamma$ = {τουλάχιστον ένα από τα δύο είναι άσος και το άθροισμα είναι 5} = {(1, 4), (4, 1)}

$A \cap B^c$ = {το άθροισμα των ζαριών είναι περιττό & κανένα δεν δείχνει άσο} =
= {(2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 3), (6, 5)}

$A \cap B \cap \Gamma = A \cap \Gamma \cap B$ = {το άθροισμα των ζαριών είναι περιττό και 5 & τουλάχιστον ένα από τα δύο είναι άσος} = {το άθροισμα των ζαριών είναι 5 & τουλάχιστον ένα από τα δύο είναι άσος} = $= \Gamma \cap B$

Άσκηση 2:

α) μόνο το *Α* να συμβαίνει: $A \cap B^c \cap \Gamma^c$

β) τουλάχιστον ένα από τα τρία να συμβαίνουν: $A \cup B \cup \Gamma$

γ) και τα τρία να συμβαίνουν: $A \cap B \cap \Gamma$

δ) το πολύ ένα από τα τρία να συμβαίνει:

$$\left(A^c \cap B^c \cap \Gamma^c\right) \cup \left(A \cap B^c \cap \Gamma^c\right) \cup \left(A^c \cap B \cap \Gamma^c\right) \cup \left(A^c \cap B^c \cap \Gamma\right)$$

ε) ακριβώς δύο από τα τρία να συμβαίνουν: $\left(A \cap B \cap \Gamma^c\right) \cup \left(A \cap B^c \cap \Gamma\right) \cup \left(A^c \cap B \cap \Gamma\right)$

στ) να συμβαίνουν τα *Α* και *Γ* αλλά όχι το *Β*: $A \cap B^c \cap \Gamma$

ζ) τουλάχιστον δύο από τα γεγονότα να συμβαίνουν: $\left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap \Gamma\right) \cup \left(B \cap \Gamma\right)$

η) κανένα από τα γεγονότα να μην συμβαίνει: $A^c \cap B^c \cap \Gamma^c$

θ) το πολύ δύο από αυτά να συμβαίνουν: $\left(A \cap B \cap \Gamma\right)^c$

ι) το πολύ τρία από αυτά να συμβαίνουν: $\left(A \cap B \cap \Gamma\right)^c \cup \left(A \cap B \cap \Gamma\right) = \Omega$

Άσκηση 3: Για $n = 2$, έχουμε: $1 \geq P(A_1 \cup A_2) \Rightarrow 1 \geq P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

$$\Rightarrow P(A_1 \cap A_2) \geq P(A_1) + P(A_2) - 1 \qquad (1)$$

Έστω ότι η ανισότητα Bonferroni ισχύει για $n = k - 1$ (με $k \geq 3$), δηλαδή ότι:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1}) \geq P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_{k-1}) - (k-2) \qquad (2)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n = k$.
Χρησιμοποιώντας στην (1) ως A_1 το γεγονός $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1}$ και ως A_2 το A_k, παίρνουμε:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1} \cap A_k) \geq P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1}) + P(A_k) - 1 \qquad (3)$$

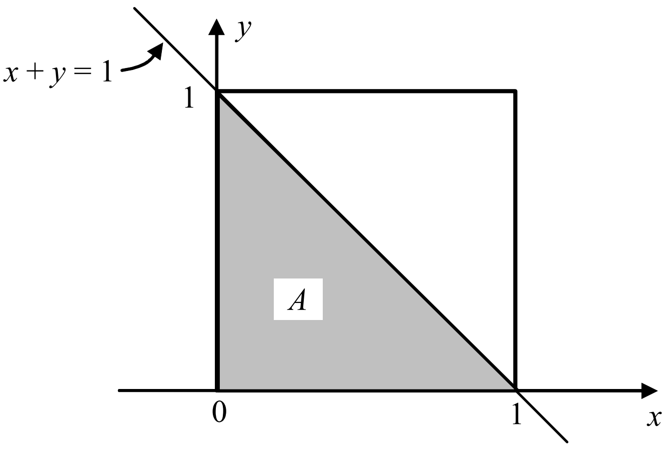
Από τις (2) και (3), έχουμε ότι:

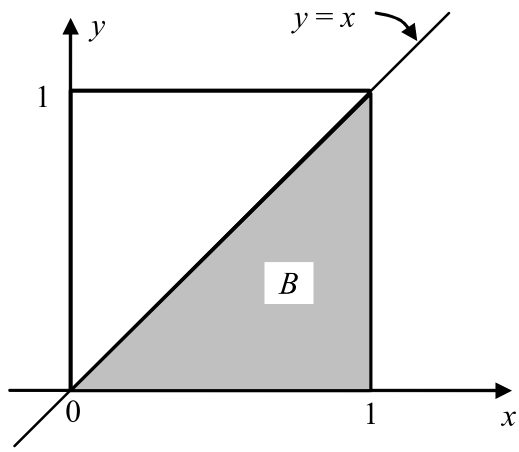
$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1} \cap A_k) \geq P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_{k-1}) - (k-2) + P(A_k) - 1$$
$$\Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k) \geq P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k) - (k-1)$$

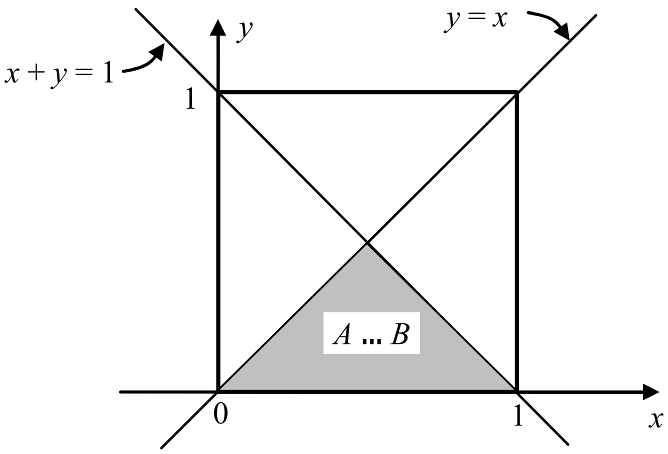
Άσκηση 4: $P\left[(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)\right] = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) - P(\underbrace{A \cap B^c \cap A^c \cap B}_{\varnothing}) =$

$= P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

Άσκηση 5:







$$P(B \backslash A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 6: K_i = {κόκκινος βώλος στην i επιλογή}, M_i = {μαύρος βώλος στην i επιλογή}

α) {και οι 2 βώλοι έχουν το ίδιο χρώμα} = {και οι 2 κόκκινοι ή και οι 2 μαύροι} =
$=(K_1 \cap K_2) \cup (M_1 \cap M_2)$

$$p = P\left[(K_1 \cap K_2) \cup (M_1 \cap M_2)\right] = P(K_1 \cap K_2) + P(M_1 \cap M_2)$$

[μιας και τα $(K_1 \cap K_2)$, $(M_1 \cap M_2)$ είναι ξένα μεταξύ τους]

Επιπλέον, $P(K_1 \cap K_2) = P(K_1)P(K_2)$ και $P(M_1 \cap M_2) = P(M_1)P(M_2)$

(μιας και K_1, K_2 ανεξάρτητα & M_1, M_2 ανεξάρτητα)

Άρα: $p = P(K_1)P(K_2) + P(M_1)P(M_2) = \frac{30}{50}\frac{30}{50} + \frac{20}{50}\frac{20}{50} = \frac{13}{25}$

β) {τουλάχιστον ένας από τους 2 βώλους είναι κόκκινος} $= K_1 \cup K_2$

$$P(K_1 \cup K_2) = 1 - P(K_1^c \cap K_2^c) = 1 - P(M_1 \cap M_2) = 1 - P(M_1)P(M_2) = 1 - \frac{20}{50}\frac{20}{50} = \frac{21}{25}$$

γ) $P\left[(K_1 \cap K_2) \cup (M_1 \cap M_2)\right] = P(K_1 \cap K_2) + P(M_1 \cap M_2) =$

$$= P(K_1)P(K_2 \setminus K_1) + P(M_1)P(M_2 \setminus M_1) = \frac{30}{50}\frac{29}{49} + \frac{20}{50}\frac{19}{49} = \frac{25}{49}$$

$$P(K_1 \cup K_2) = 1 - P(K_1^c \cap K_2^c) = 1 - P(M_1 \cap M_2) = 1 - P(M_1)P(M_2 \setminus M_1) = 1 - \frac{20}{50}\frac{19}{49} = \frac{207}{245}$$

Άσκηση 7: Γ = {γράμματα}, K = {κεφάλι}
Ο δειγματικός χώρος Ω θα περιέχει όλες τις ακολουθίες από Κ & Γ που τελειώνουν την 1η φορά που εμφανίζεται ΚΚ ή ΓΓ. Δηλαδή:

$$\Omega = \{\Gamma\Gamma, KK, \Gamma KK, K\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma\Gamma, K\Gamma KK, \Gamma K\Gamma KK, K\Gamma K\Gamma\Gamma, ...\}$$

Επομένως, ο Ω έχει άπειρο πλήθος στοιχείων.

E = {σταματάω πριν την 4η ρίψη} = $\{\Gamma\Gamma, KK, \Gamma KK, K\Gamma\Gamma\}$

Άρα, $P(E) = P(\Gamma\Gamma) + P(KK) + P(\Gamma KK) + P(K\Gamma\Gamma) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{2}{4} + \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$

Άσκηση 8:
1ος τρόπος: K_1 = {το 1ο παιδί είναι κορίτσι}, K_2 = {το 2ο παιδί είναι κορίτσι},
A_1 = {το 1ο παιδί είναι αγόρι}, A_2 = {το 2ο παιδί είναι αγόρι}
{και τα 2 κορίτσια} = $K_1 \cap K_2$, {ένα τουλάχιστον κορίτσι} = $K_1 \cup K_2$

$$P(K_1 \cap K_2 \setminus K_1 \cup K_2) = \frac{P[K_1 \cap K_2 \cap (K_1 \cup K_2)]}{P(K_1 \cup K_2)} = \frac{P(K_1 \cap K_2)}{1 - P(K_1^c \cap K_2^c)} = \frac{P(K_1)P(K_2)}{1 - P(A_1 \cap A_2)} =$$

$$= \frac{P(K_1)P(K_2)}{1-P(A_1)P(A_2)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(K_1 \cap K_2 \setminus K_1) = \frac{P(K_1 \cap K_2 \cap K_1)}{P(K_1)} = \frac{P(K_1 \cap K_2)}{P(K_1)} = \frac{P(K_1)P(K_2)}{P(K_1)} = P(K_2) = \frac{1}{2}$$

2ος τρόπος: $\Omega = \{AK, KA, KK, AA\}$, δηλ. συμμετρικός χώρος πιθανότητας αποτελούμενος από 2άδες διατεταγμένες κατά ηλικία & $|\Omega| = 4$

$K_1 \cap K_2 = \{KK\}$

$K_1 = \{KA, KK\}$

$K_1 \cup K_2 = \{AK, KA, KK\}$

$$P(K_1 \cap K_2 \setminus K_1 \cup K_2) = \frac{P(K_1 \cap K_2)}{P(K_1 \cup K_2)} = \frac{|K_1 \cap K_2| / |\Omega|}{|K_1 \cup K_2| / |\Omega|} = \frac{1}{3}$$

$$P(K_1 \cap K_2 \setminus K_1) = \frac{P(K_1 \cap K_2)}{P(K_1)} = \frac{|K_1 \cap K_2| / |\Omega|}{|K_1| / |\Omega|} = \frac{1}{2}$$