

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Πιθανότητες» (EM161) – Εαρινό Εξάμηνο 2004-2005
Διδάσκων Ι. Τσαγράκης

1^ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Ρίχνουμε δύο ζάρια. Έστω A το γεγονός το άθροισμα των ζαριών να είναι περιττό, B το γεγονός τουλάχιστον ένα από τα δύο να είναι άσος, και Γ το γεγονός το άθροισμα να είναι 5. Περιγράψτε τα γεγονότα: $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap \Gamma$, $A \cap B^c$ και $A \cap B \cap \Gamma$.

Άσκηση 2: Έστω A , B και Γ τρία γεγονότα. Βρείτε εκφράσεις για τα ακόλουθα γεγονότα έτσι ώστε από τα A , B και Γ

- α) μόνο το A να συμβαίνει
- β) τουλάχιστον ένα από τα τρία να συμβαίνουν
- γ) και τα τρία να συμβαίνουν
- δ) το πολύ ένα από τα τρία να συμβαίνει
- ε) ακριβώς δύο από τα τρία να συμβαίνουν
- στ) να συμβαίνουν τα A και Γ αλλά όχι το B
- ζ) τουλάχιστον δύο από τα γεγονότα να συμβαίνουν
- η) κανένα από τα γεγονότα να μην συμβαίνει
- θ) το πολύ δύο από αυτά να συμβαίνουν
- ι) το πολύ τρία από αυτά να συμβαίνουν

Άσκηση 3: Αποδείξτε με τη μέθοδο της επαγωγής την ανισότητα Bonferroni για n γεγονότα A_1, A_2, \dots, A_n :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - (n-1)$$

Άσκηση 4: Δείξτε ότι η πιθανότητα να συμβεί μόνο ένα από τα γεγονότα A και B είναι ίση με $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

Άσκηση 5: Γνωρίζουμε ότι ένα σημείο που επιλέχθηκε τυχαία στο μοναδιαίο τετράγωνο $S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, ανήκει και στο τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες $x = 0$, $y = 0$ και $x + y = 1$. Βρείτε την πιθανότητα να ανήκει και στο τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες $y = 0$, $x = 1$ και $y = x$.

Άσκηση 6: Δύο βόλαιο επιλέγονται με επανατοποθέτηση του βόλου που επιλέχθηκε πρώτος από ένα κουτί που περιέχει 30 κόκκινους και 20 μαύρους βόλους.

- α) Υπολογίστε την πιθανότητα οι δύο βόλαιο που επιλέγουμε να έχουν το ίδιο χρώμα.
- β) Υπολογίστε την πιθανότητα τουλάχιστον ένας από τους βόλους που επιλέγουμε να είναι κόκκινος.
- γ) Υπολογίστε τις πιθανότητες που ζητούνται στα ερωτήματα (α) και (β) υποθέτοντας ότι ο πρώτος βόλος δεν επανατοποθετείται στο κουτί.

Άσκηση 7: Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα μέχρι να φέρουμε δυο συνεχόμενες φορές την ίδια ένδειξη. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος; Ποια είναι η πιθανότητα να σταματήσουμε πριν την τέταρτη ρίψη;

Άσκηση 8: Ένα ζευγάρι έχει δυο παιδιά. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι και τα δυο κορίτσια αν το ένα είναι κορίτσι; Αλλάζει η πιθανότητα αν ξέρουμε ότι το μεγαλύτερο είναι κορίτσι;