ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ -ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

<u>Θέματα εξέτασης στο μάθημα «Πιθανότητες» (ΕΜ161)</u> Ηράκλειο, 29 Αυγούστου 2005

<u>Θέμα 1. (μονάδες 2)</u>

Έχουμε 3 δοχεία. Το Ι έχει 5 κόκκινους και 6 μαύρους βόλους. Το ΙΙ έχει 6 κόκκινους και 10 μαύρους βόλους, και το ΙΙΙ έχει 7 κόκκινους και 8 μαύρους βόλους.

α) Αν τραβήξουμε ένα βόλο από κάθε δοχείο, ποια είναι η πιθανότητα να είναι και οι τρεις κόκκινοι;

β) Πρώτα επιλέγουμε τυχαία ένα από τα τρία δοχεία και μετά ένα βόλο. Ποια η πιθανότητα να είναι κόκκινος;

γ) Στο (β) ποια είναι η πιθανότητα να διαλέξαμε το πρώτο δοχείο δεδομένου ότι ο βόλος είναι κόκκινος;

δ) Τραβάμε ένα βόλο από το Ι και τον βάζουμε στο ΙΙ. Μετά τραβάμε ένα βόλο από το ΙΙ και τον βάζουμε στο ΙΙΙ. Τέλος, τραβάμε ένα βόλο από το ΙΙΙ. Ποια είναι η πιθανότητα και οι τρεις βόλοι που τραβήξαμε να είναι κόκκινοι;

<u>Θέμα 2. (μονάδες 2)</u>

Βρείτε την πιθανότητα ένα χέρι του πόκερ με 5 χαρτιά (δηλ. μια πεντάδα χαρτιών που επιλέγονται τυχαία από μια τράπουλα χωρίς επανατοποθέτηση) να περιέχει ακριβώς ένα χαρτί με αριθμό μικρότερο από 6, δεδομένου ότι περιέχει τουλάχιστον ένα χαρτί μεγαλύτερο από 10, και όπου οι άσοι θεωρούνται υψηλά χαρτιά.

<u>Θέμα 3. (μονάδες 2.5)</u>

Ένα κουτί περιέχει 4 βόλους που φέρουν τους αριθμούς 1, 2, 3 και 4. Επιλέγουμε τυχαία δύο βόλους από το κουτί χωρίς επανατοποθέτηση. Έστω X ο αριθμός στον πρώτο βόλο και Y ο αριθμός στο δεύτερο βόλο. Υπολογίστε τη συνδιακύμανση $\mathrm{Cov}(X,Y)$ και το συντελεστή συσχέτισης $\rho(X,Y)$.

<u>Θέμα 4. (μονάδες 2)</u>

Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα: $f(x) = ce^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$. Υπολογίστε:

α) τη σταθερά c

β) την πιθανότητα $P\left(1 \le |X| \le 3\right)$

γ) τις μέσες τιμές $\mathbb{E}(X)$ και $\mathbb{E}(|X|)$

δ) τη συνάρτηση κατανομής της X, και σχεδιάστε το γράφημα της

<u>Θέμα 5. (μονάδες 2)</u>

Έστω X και Y με από κοινού πυκνότητα f που είναι ομοιόμορφη στο εσωτερικό του τριγώνου με κορυφές τα σημεία (0,0), (1,0), και (0,2). Βρείτε τη δεσμευμένη μέση τιμή της Y με δεδομένη τη X.

Σημείωση: Μια τράπουλα έχει 52 χαρτιά. Αυτά τα χαρτιά σχηματίζουν 4 οικογένειες που λέγονται μπαστούνια, καρό, κούπες, και σπαθιά. Κάθε οικογένεια έχει 13 χαρτιά με τιμές όψης 2, 3, 4, ..., 10, *J*, *Q*, *K*, *A*.

Χρήσιμα αθροίσματα:

$$\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}, \qquad \sum_{k=0}^{N} x^k = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} kr^k = \frac{r}{(1-r)^2}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k^2 r^k = \frac{r(1+r)}{(1-r)^3},$$

όπου: N θετικός ακέραιος, $x, r \in R$ και $|r| < 1$.

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ (ΕΜ 161)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2005

ΘΕΜΑ 1

α) $K_i = \{$επιλογή κόκκινου βόλου από το δοχείο $i\}$

όπου $i=1,2,3$ για τα δοχεία I, II, III αντίστοιχα

$P(K_1 \cap K_2 \cap K_3) = P(K_1) \cdot P(K_2) \cdot P(K_3)$ [επειδή K_1, K_2, K_3 είναι ανεξάρτητα]

$P(K_1) = \frac{5}{11}$, $P(K_2) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$, $P(K_3) = \frac{7}{15}$

Άρα: $P(K_1 \cap K_2 \cap K_3) = \frac{5}{11} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{7}{15} = \frac{7}{88}$

β) $K = \{$επιλογή κόκκινου βόλου$\}$

$\Delta_i = \{$επιλογή του δοχείου $i\}$

$$P(K) = P[(K \cap \Delta_1) \cup (K \cap \Delta_2) \cup (K \cap \Delta_3)] =$$

$$= P(K \cap \Delta_1) + P(K \cap \Delta_2) + P(K \cap \Delta_3) =$$

$$= P(\Delta_1) \cdot P(K \setminus \Delta_1) + P(\Delta_2) \cdot P(K \setminus \Delta_2) + P(\Delta_3) \cdot P(K \setminus \Delta_3)$$

όπου $P(\Delta_1) = P(\Delta_2) = P(\Delta_3) = \frac{1}{3}$

και $P(K|\Delta_1) = \frac{5}{11}$, $P(K \setminus \Delta_2) = \frac{3}{8}$, $P(K \setminus \Delta_3) = \frac{7}{15}$

Άρα: $P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{11} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{15} = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{11} + \frac{3}{8} + \frac{7}{15}\right) = \frac{1711}{3960}$

γ) $P(\Delta_1 \setminus K) = \frac{P(\Delta_1 \cap K)}{P(K)} = \frac{P(\Delta_1) \cdot P(K \setminus \Delta_1)}{P(K)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{11}}{\frac{1711}{3960}} = \frac{600}{1711}$

δ) $P(K_1 \cap K_2 \cap K_3) = P(K_1) \cdot P(K_2 \setminus K_1) \cdot P(K_3 \setminus K_1 \cap K_2)$ [πολλαπλασιαστικός κανόνας]

όπου $P(K_1) = \frac{5}{11}$, $P(K_2 \setminus K_1) = \frac{7}{17}$, $P(K_3 \setminus K_1 \cap K_2) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

μιας και:

5K, 6M	7K, 10M	8K, 8M
δοχείο I πριν K_1	δοχείο II πριν K_2 και δεδομένου K_1	δοχείο III πριν K_3 και δεδομένου $K_1 \cap K_2$

άρα: $P(K_1 \cap K_2 \cap K_3) = \frac{5}{11} \cdot \frac{7}{17} \cdot \frac{1}{2} = \frac{35}{374}$

ΘΕΜΑ 2

$A_j = \{j$ ακριβώς χαρτιά στην 5άδα είναι μικρότερα του $6\}$

$B_K = \{K$ ακριβώς χαρτιά στην 5άδα είναι μεγαλύτερα του $10\}$

Ζητάμε την πιθανότητα: $P(A_1 \setminus \bigcup_{K=1}^{5} B_K)$

Όμως: $\bigcup_{K=1}^{5} B_K = \{$τουλάχιστον ένα χαρτί στην 5άδα είναι μεγαλύτερο του $10\}$
$= \{$όχι 0 χαρτιά στην 5άδα είναι μεγαλύτερα του $10\} =$
$= B_0^c$

Οπότε: $P(A_1 \setminus \bigcup_{K=1}^{5} B_K) = P(A_1 \setminus B_0^c) = \frac{P(A_1 \cap B_0^c)}{P(B_0^c)} = \frac{P(A_1) - P(A_1 \cap B_0)}{1 - P(B_0)}$

Διαμέριση της τράπουλας:
- χαρτιά $\{2,3,4,5\}$, πλήθους 16
- χαρτιά $\{6,7,8,9,10\}$, πλήθους 20
- χαρτιά $\{J, Q, K, A\}$, πλήθους 16

$P(A_1) = \frac{\binom{16}{1}\binom{36}{4}}{\binom{52}{5}}$, $P(B_0) = \frac{\binom{36}{5}\binom{16}{0}}{\binom{52}{5}} = \frac{\binom{36}{5}}{\binom{52}{5}}$

$$P(A_1 \cap B_0) = \frac{\binom{16}{1}\binom{20}{4}\binom{16}{0}}{\binom{52}{5}} = \frac{16\binom{20}{4}}{\binom{52}{5}}$$

οπότε $$P\left(A_1 \setminus \bigcup_{k=1}^{5} B_k\right) = \frac{16\left[\binom{36}{4} - \binom{20}{4}\right]}{\binom{52}{5} - \binom{36}{5}}$$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ 3}}$

$$P(X=k) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{για } k=1,2,3,4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Άρα: $$EX = \sum_{k=1}^{4} k\,P(X=k) = \sum_{k=1}^{4} \frac{k}{4} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} k = \frac{1}{4}\,\frac{4\cdot 5}{2} = \frac{5}{2}$$

$$P(Y=m) = \sum_{k=1}^{4} P(X=k, Y=m) = \sum_{k=1}^{4} P(Y=m \setminus X=k)\cdot P(X=k) =$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq m}}^{4} \left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

Άρα: $$P(Y=m) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{για } m=1,2,3,4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και $$EY = \sum_{m=1}^{4} m\cdot P(Y=m) = \sum_{m=1}^{4} m\,\frac{1}{4} = \frac{5}{2}$$

Επιπλέον, από παραπάνω προκύπτει ότι:

$$P(X=k, Y=m) = \begin{cases} \frac{1}{12}, & \text{για } k,m=1,2,3,4 \text{ και } k\neq m \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η τ.μ. $Z = X\cdot Y$ παίρνει τις τιμές $z = 2,3,4,6,8,12$

Άρα: $E(XY) = 2\cdot P(XY=2) + 3\cdot P(XY=3) + 4\cdot P(XY=4) +$

$+ 6\cdot P(XY=6) + 8\cdot P(XY=8) + 12\cdot P(XY=12) =$

$$= 2\cdot\left[P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=1)\right] +$$

$$+ 3\cdot\left[P(X=1, Y=3) + P(X=3, Y=1)\right] +$$

$$+ 4\cdot\left[P(X=1, Y=4) + P(X=4, Y=1)\right] +$$

$$+ 6\cdot\left[P(X=2, Y=3) + P(X=3, Y=2)\right] +$$

$$+ 8\cdot\left[P(X=2, Y=4) + P(X=4, Y=2)\right] +$$

$$+ 12\cdot\left[P(X=3, Y=4) + P(X=4, Y=3)\right] =$$

$$= \frac{2+3+4+6+8+12}{6} = \frac{35}{6}$$

Επομένως: $Cov(X,Y) = E(XY) - (EX)\cdot(EY) = \frac{35}{6} - \frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2} = -\frac{5}{12}$

$$EX^2 = \sum_{k=1}^{4} k^2 \cdot P(X=k) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} k^2 = \frac{\cancel{4}\cdot 5\cdot(2\cdot 4+1)}{\cancel{4}\cdot 6} = \frac{45}{6} = \frac{15}{2}$$

$$EY^2 = \sum_{m=1}^{4} m^2 P(Y=m) = \frac{1}{4}\sum_{m=1}^{4} m^2 = \frac{15}{2}$$

Άρα: $Var X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{15}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{30}{4} - \frac{25}{4} = \frac{5}{4}$

Ομοίως: $Var Y = EY^2 - (EY)^2 = \frac{5}{4}$

Τελικά: $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{(Var X)\cdot(Var Y)}} = \frac{-5/12}{5/4} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$

ΘΕΜΑ 4

α) Για να είναι η $f(x)$ συνάρτηση πυκνότητας θα πρέπει:

i) $f(x) \geq 0, \ \forall \ x \in \mathbb{R}$, δηλ. θα πρέπει $c \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} c e^{-|x|}\,dx = 1 \Rightarrow 2\int_{0}^{\infty} c e^{-x}\,dx = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2\left[c e^{-x}\right]_0^{\infty} = 1 \Rightarrow -2c\left(\lim_{x\to\infty} e^{-x} - 1\right) = 1 \Rightarrow 2c = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = \frac{1}{2}$

β) $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, & x<0 \\ \frac{1}{2}e^{-x}, & x\geq 0 \end{cases}$

Οπότε: $P(1 \leq |X| \leq 3) = P(-3 \leq X \leq -1 \text{ ή } 1 \leq X \leq 3) =$

$= P(-3 \leq X \leq -1) + P(1 \leq X \leq 3) = \int_{-3}^{-1} f(x)\,dx + \int_{1}^{3} f(x)\,dx =$

$= \int_{-3}^{-1} \frac{1}{2}e^{x}\,dx + \int_{1}^{3} \frac{1}{2}e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\left(e^{-1} - e^{-3}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{-3} - e^{-1}\right) =$

$= e^{-1} - e^{-3} = \frac{1}{e}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$

γ) $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2}e^{-|x|}\,dx = 0$ [περιττή ολοκληρωτέα συνάρτηση]

$E|X| = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{2}e^{-|x|}\,dx = 2\int_{0}^{\infty} \frac{x}{2}e^{-x}\,dx =$

$$=\int_0^\infty x e^{-x}\,dx = \left[-x e^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx =$$

$$= -\lim_{x\to\infty}(x e^{-x}) + \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1$$

δ) Η συνάρτηση κατανομής της X δίνεται ως:

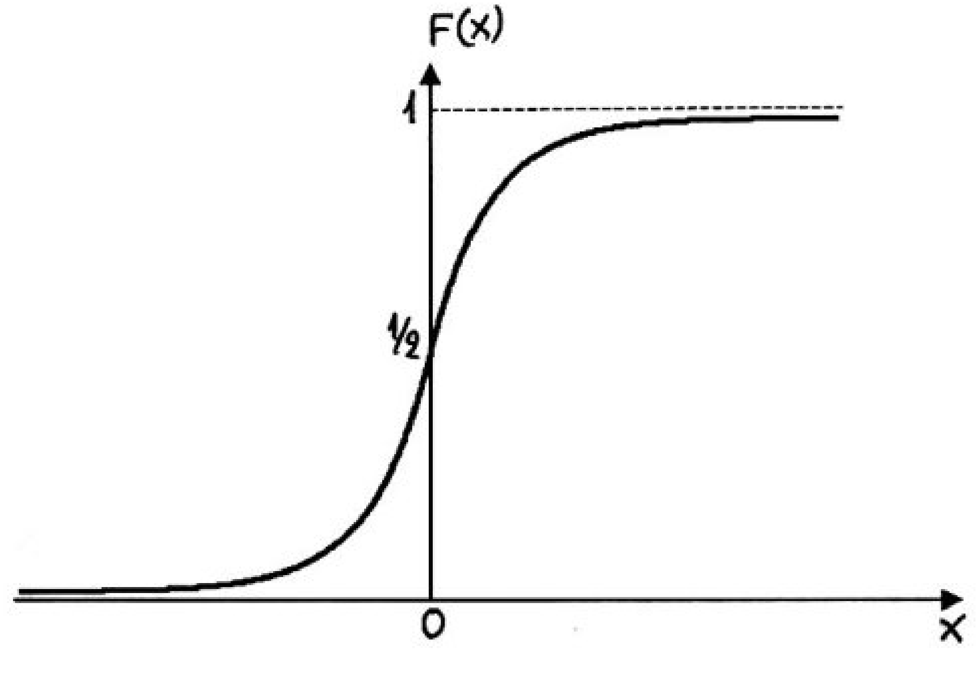
$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{-|y|}dy$, η οποία για $x<0$ δίνει:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^y}{2}dy = \frac{1}{2}\left[e^y\right]_{-\infty}^{x} = \frac{e^x}{2} \quad , \text{ για } x<0$$

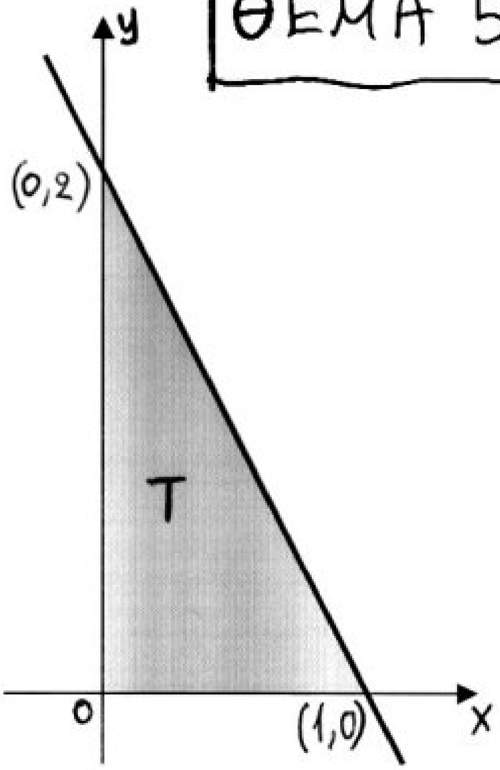
Για $x\geq 0$ έχουμε: $F(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^y}{2}dy + \int_0^x \frac{e^{-y}}{2}dy =$

$$= \frac{1}{2}\left[e^y\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2}\left[e^{-y}\right]_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x}-1) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$$

Άρα: $F(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2}, & \text{για } x<0 \\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & \text{για } x\geq 0 \end{cases}$



ΘΕΜΑ 5



Η εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία (1,0) και (0,2) είναι:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x-(y-2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2(1-x)$$

Αφού η $f(x,y)$ είναι ομοιόμορφη στο εσωτερικό του τριγώνου $T=\{(x,y) \setminus 0<x<1,\ 0<y<2(1-x)\}$, θα είναι ίση με:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{\text{εμβαδόν } T}, & \text{αν } (x,y)\in T \\ 0, & \text{αν } (x,y)\notin T \end{cases}, \quad \text{δηλαδή:}$$

$$f(x,y)=\begin{cases} 1, & \text{αν } 0<x<1 \text{ και } 0<y<2(1-x) \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας $f_{Y\setminus X}(y\setminus x)$ δίνεται ως:

$$f_{Y\setminus X}(y\setminus x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \text{ με } f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_0^{2(1-x)} dy = 2(1-x)$$

για $0<x<1$

Άρα: $$f_{Y\setminus X}(y\setminus x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2(1-x)}, & 0<x<1,\ 0<y<2(1-x) \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Επομένως, η ζητούμενη μέση τιμή είναι ίση με:

$$E[Y\setminus X=x]=\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{Y\setminus X}(y\setminus x)\,dy=\int_0^{2(1-x)} \frac{y}{2(1-x)}dy = \frac{1}{2(1-x)}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{2(1-x)} =$$

$$= \frac{4(1-X)^2}{4(1-X)} = 1-X \ , \quad \text{για} \quad 0<x<1$$

Ενώ $E[Y \backslash X = x] = 0$, για $x \notin (0,1)$