ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ -ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θέματα εξέτασης στο μάθημα «Πιθανότητες» (ΕΜ161) Ηράκλειο, 19 Ιουνίου 2005

Θέμα 1. (μονάδες 2): Ένα πανεπιστήμιο αγοράζει υπολογιστές από τρεις διαφορετικές εταιρείες: 45% των υπολογιστών αγοράζονται από την εταιρεία Α, 30% από την εταιρεία Β, και 25% από την εταιρεία Γ. Γνωρίζουμε ότι οι υπολογιστές της εταιρείας Α είναι ελαττωματικοί σε ποσοστό 3%, οι υπολογιστές της εταιρείας Β είναι ελαττωματικοί σε ποσοστό 2%, και οι υπολογιστές της εταιρείας Γ είναι ελαττωματικοί σε ποσοστό 4%. Αν διαλέξουμε τυχαία έναν υπολογιστή του πανεπιστημίου,
α) Ποια είναι η πιθανότητα να είναι ελαττωματικός
β) Δεδομένου ότι είναι ελαττωματικός, ποια είναι η πιθανότητα να αγοράστηκε από την εταιρεία Β;

Θέμα 2. (μονάδες 2.5): Σε ένα δοχείο έχετε 10 βόλους από τους οποίους 4 είναι άσπροι. Τρεις παίχτες, οι Α, Β και Γ τραβάνε διαδοχικά βόλους από το δοχείο (πρώτα ο Α, μετά ο Β, μετά ο Γ, μετά ο Α, μετά ο Β, κ.ο.κ.). Κερδίζει όποιος τραβήξει πρώτος άσπρο βόλο. Βρείτε την πιθανότητα να κερδίσει κάθε παίχτης:
α) αν κάθε βόλος, μετά που θα τραβηχτεί από κάποιο παίχτη, επανατοποθετείται στο δοχείο,
β) αν οι βόλοι που διαλέγονται δεν επανατοποθετούνται.

Θέμα 3. (μονάδες 2): Ένας παίχτης ρίχνει ένα αμερόληπτο νόμισμα 3 φορές. Αν φέρει και τις 3 φορές γράμματα, πληρώνει 1 ευρώ. Διαφορετικά, κερδίζει τόσα ευρώ όσες ήταν οι φορές που έφερε κεφαλή. Αν X είναι η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει το «κέρδος» του παίχτη, βρείτε την $\mathbb{E}(X)$ και $\mathbb{E}(X^2)$.

Θέμα 4. (μονάδες 2): Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y με $\mathbb{E}(X)=2$, $\mathbb{E}(Y)=3$, $\mathrm{Var}(X)=9$, $\mathrm{Var}(Y)=16$, $\rho(X,Y)=0.2$
(α) Αν $Z=3(X+Y)(X-Y)$, υπολογίστε την $\mathbb{E}(Z)$.
(β) Αν $T=3X+2Y$ και $U=3X-2Y$, υπολογίστε την $\mathrm{Cov}(T,U)$.
(γ) Αν $W=3X+2Y+5$, υπολογίστε την $\mathbb{E}(W)$ και την $\mathrm{Var}(W)$.

Θέμα 5. (μονάδες 2.5): Αν η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των X και Y δίνεται ως

$$f(x,y)=\begin{cases} c(y-x)e^{-y}, & \text{για } -y\le x\le y, \text{ και } 0<y<\infty \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases},$$

υπολογίστε:
α) τη σταθερά c,
β) τις περιθώριες πυκνότητες των X και Y,
γ) τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της X δεδομένου ότι $Y=y$
δ) τη δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}(X \setminus Y=y)$

ΟΣΟΙ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝ ΑΠΑΛΛΑΚΤΙΚΑ ΤΗΝ ΠΡΟΟΔΟ, ΓΡΑΦΟΥΝ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ 4, 5, ΑΠΟ ΠΑΡΑΠΑΝΩ, ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΤΑ ΕΠΟΜΕΝΑ

Θέμα 6. (μονάδες 2): Αν X, Y είναι ανεξάρτητες και έχουν εκθετική πυκνότητα με παράμετρο $\lambda>0$, βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής $Z=X/(X+Y)$. [Η εκθετική συνάρτηση πυκνότητας με παράμετρο λ δίνεται από τύπο $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ για $x>0$, και $f(x)=0$ για $x\le 0$].

Θέμα 7. (μονάδες 2): Αν η συνάρτηση κατανομής της X είναι $F(x)=1-\frac{1}{2}(x+2)e^{-x/2}$, για $x>0$ και $F(x)=0$, για $x\le 0$, βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας και τη συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $Y=e^{X/2}$.

Θέμα 8. (μονάδες 2): Επιλέγουμε ομοιόμορφα ένα σημείο στο (-10,10). Έστω Y η τυχαία μεταβλητή που ορίζεται έτσι ώστε να δίνει τη συντεταγμένη του σημείου αν το σημείο ανήκει στο $[-5,5]$, $Y=-5$ αν το σημείο ανήκει στο $(-10,-5)$, και $Y=5$ αν το σημείο ανήκει στο (5,10). Βρείτε τη συνάρτηση κατανομής της Y. Η Y είναι διακριτή ή συνεχής τυχαία μεταβλητή; Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(Y=-5)$ και $P(Y=5)$.

Τυπολόγιο: $\sum_{k=1}^{N} k=\frac{N(N+1)}{2}$, $\sum_{k=0}^{N} x^k=\frac{1-x^{N+1}}{1-x}$, $\sum_{k=0}^{\infty} r^k=\frac{1}{1-r}$, όπου: N θετικός ακέραιος, $x\in R$ και $|r|<1$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ (ΕΜ 161)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2005

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ 1}}$

$A = \{\text{υπολογιστής από την εταιρεία } A\}$

$B = \{\text{υπολογιστής από την εταιρεία } B\}$

$\Gamma = \{\text{υπολογιστής από την εταιρεία } \Gamma\}$

$E = \{\text{ελαττωματικός υπολογιστής}\}$

α) $$P(E) = P\big[(E\cap A)\cup(E\cap B)\cup(E\cap\Gamma)\big] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ξένα}}}{=}$$

$$= P(E\cap A) + P(E\cap B) + P(E\cap \Gamma) =$$

$$= P(E|A)\cdot P(A) + P(E|B)\cdot P(B) + P(E|\Gamma)\cdot P(\Gamma) =$$

$$= \frac{3}{100}\cdot\frac{45}{100} + \frac{2}{100}\cdot\frac{30}{100} + \frac{4}{100}\cdot\frac{25}{100} = \frac{135+60+100}{(100)^2} =$$

$$= \frac{295}{100^2} = \frac{59}{2000}$$

β) $$P(B|E) = \frac{P(E\cap B)}{P(E)} = \frac{P(E|B)\cdot P(B)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{100}\cdot\frac{30}{100}}{\frac{295}{100^2}} = \frac{60}{295} = \frac{12}{59}$$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ 2}}$

$X =$ δοκιμή στην οποία πρωτοεμφανίζεται άσπρος βόλος

Δηλ. αν $X=1$ ο πρώτος που τραβά βγάζει άσπρο βόλο,
αν $X=2$ ο δεύτερος που >> >> >> >>, ενώ ο πρώτος δεν έβγαλε άσπρο βόλο κ.ο.κ.

ο Α τραβά τον 1ο βόλο, μετά τον 4ο, μετά τον 7ο, τον 10ο κ.ο.κ.

Αντίστοιχα, ο Β τραβά τον 2ο βόλο, μετά τον 5ο, τον 8ο, κ.ο.κ.

και ο Γ τραβά τον 3ο βόλο, μετά τον 6ο, τον 9ο, κ.ο.κ.

Άρα, ο Α κερδίζει εάν: $X=1, X=4, X=7, \ldots$ δηλ. $X=3k+1$, με $k=0,1,2,\ldots$

ο Β κερδίζει εάν: $X=2, X=5, X=8, \ldots$ δηλ. $X=3k+2$, με $k=0,1,2,\ldots$

ο Γ κερδίζει εάν: $X=3, X=6, X=9, \ldots$ δηλ. $X=3k+3$, με $k=0,1,2,\ldots$

Η διαφορά του ερωτήματος (α) από το (β) είναι ότι όταν οι βόλοι επανατοποθετούνται στο δοχείο σταματάμε σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων (αφού το μέγιστο την 7η φορά θα βγει άσπρος βόλος), ενώ αν οι βόλοι επανατοποθετούνται η διαδικασία μπορεί να συνεχίζεται επ' άπειρον.

Έτσι έχουμε:

α) $P(\text{κερδίζει ο } A) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=3k+1)$

$P(\text{κερδίζει ο } B) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=3k+2)$

$P(\text{κερδίζει ο } \Gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=3k+3)$

Όμως: $P(X=1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $P(X=2) = \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{10} = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}$, $P(X=3) = \left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{2}{5}$

ή γενικά $P(X=m) = \left(\frac{6}{10}\right)^{m-1}\cdot\frac{4}{10} = \left(\frac{3}{5}\right)^{m-1}\cdot\frac{2}{5}$

Εναλλακτικά, μπορούσαμε να θεωρήσουμε τη διαδικασία ως ακολουθία δοκιμών Bernoulli με "επιτυχία" = {επιλογή άσπρου βόλου}, και πιθανότητα "επιτυχίας" $p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ οπότε η πιθανότητα η "1η επιτυχία" να συμβεί στην m-οστή δοκιμή θα δίνεται από γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p = 2/5$, δηλαδή

$P(X=m) = (1-p)^{m-1}p = \left(\frac{3}{5}\right)^{m-1}\cdot\frac{2}{5}$

Άρα οι ζητούμενες πιθανότητες υπολογίζονται ως εξής:

$$P(\text{κερδίζει ο } A) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=3k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{3k} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{3}{5}\right)^3\right]^k =$$

$$= \frac{2}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{27}{125}\right)^k = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{27}{125}}\right) = \frac{25}{49}$$

$$P(\text{κερδίζει ο } B) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=3k+2) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{3k+1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{27}{125}\right)^k =$$

$$= \frac{6}{25} \left(\frac{1}{1-\frac{27}{125}}\right) = \frac{15}{49}$$

$$P(\text{κερδίζει ο } \Gamma) = 1 - P(\text{κερδίζει ο } A) - P(\text{κερδίζει ο } B) = 1 - \frac{25}{49} - \frac{15}{49} = \frac{9}{49}$$

β) $$P(\text{κερδίζει ο } A) = P(X=1) + P(X=4) + P(X=7) =$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} \cdot \frac{4}{7} + \frac{\binom{6}{6}}{\binom{10}{6}} = \frac{2}{5} + \frac{6!}{3!} \frac{7!}{10!} \frac{4}{7} + \frac{6!\,4!}{10!} =$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} + \frac{24}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{2}{5} + \frac{2}{21} + \frac{1}{210} = \frac{105}{210} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{κερδίζει ο } B) = P(X=2) + P(X=5) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{\binom{6}{4}}{\binom{10}{4}} \cdot \frac{4}{6} =$$

$$= \frac{4}{15} + \frac{6!}{\cancel{2}} \frac{6!}{10!} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} = \frac{4}{15} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{4}{15} + \frac{1}{21} = \frac{11}{35}$$

$$P(\text{κερδίζει ο } \Gamma) = 1 - P(\text{κερδίζει ο } A) - P(\text{κερδίζει ο } B) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{11}{35} = \frac{70-35-22}{70} = \frac{13}{70}$$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ 3}}$

$K = \{\text{κεφαλή}\}$, $\Gamma = \{\text{γράμματα}\}$

Το σύνολο των πιθανών αποτελεσμάτων για την αλληλουχία των τριών ρίψεων είναι:

$$\Omega = \{\Gamma\Gamma\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma K \Gamma, K\Gamma\Gamma, \Gamma K K, K\Gamma K, KK\Gamma, KKK\}$$

Τα αποτελέσματα αυτά είναι ισοπίθανα, οπότε η πιθανότητα καθενός από τα στοιχεία του Ω είναι ίση με $P = (1/|\Omega|) = \frac{1}{8}$

Η τ.μ. X έχει τις πιθανές τιμές $\{-1, 1, 2, 3\}$, τις οποίες λαμβάνει με τις ακόλουθες πιθανότητες:

$$P(X=-1) = P(\Gamma\Gamma\Gamma) = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = P(\Gamma\Gamma K) + P(\Gamma K \Gamma) + P(K\Gamma\Gamma) = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = P(\Gamma KK) + P(K\Gamma K) + P(KK\Gamma) = 3/8$$

$$P(X=3) = P(KKK) = \frac{1}{8}$$

Άρα: $EX = \sum_k k\, P(X=k) = (-1)\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{3}{8} + 2\cdot\frac{3}{8} + 3\cdot\frac{1}{8} = \frac{11}{8}$

$$EX^2 = \sum_k k^2 P(X=k) = (-1)^2\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + 2^2\cdot\frac{3}{8} + 3^2\cdot\frac{1}{8} =$$

$$= \frac{1+3+12+9}{8} = \frac{25}{8}$$

ΘΕΜΑ 4

(α) $Z = 3(X+Y)(X-Y) = 3(X^2 - Y^2)$

Άρα: $E(Z) = 3(EX^2 - EY^2) = 3\left[\text{Var}X + (EX)^2 - \right.$

$\left. - \text{Var}Y - (EY)^2\right] = 3(\cancel{9} + 4 - 16 - \cancel{9}) = -36$

(β) $\text{Cov}(T,U) = E(TU) - E(T)\cdot E(U) =$

$= E\left[(3X+2Y)(3X-2Y)\right] - E(3X+2Y)\cdot E(3X-2Y) =$

$= E(9X^2 - 4Y^2) - \left[3E(X) + 2E(Y)\right]\cdot\left[3E(X) - 2E(Y)\right] =$

$= 9E(X^2) - 4E(Y^2) - \left\{9[E(X)]^2 - 4[E(Y)]^2\right\} =$

$= 9\left[\text{Var}(X) + (EX)^2\right] - 4\left[\text{Var}(Y) + (EY)^2\right] -$

$- 9(EX)^2 + 4(EY)^2 =$

$= 9\,\text{Var}(X) - 4\,\text{Var}(Y) = 9\cdot 9 - 4\cdot 16 = 17$

(γ) $E(W) = E(3X + 2Y + 5) = 3(EX) + 2(EY) + 5 =$

$= 3\cdot 2 + 2\cdot 3 + 5 = 17$

$\text{Var}(W) = \text{Var}(3X + 2Y + 5) = \text{Var}(3X + 2Y) =$

$= \text{Var}(3X) + \text{Var}(2Y) + 2\,\text{Cov}(3X, 2Y) =$

$= 9\,\text{Var}(X) + 4\,\text{Var}(Y) + 2\,E(6XY) - 2\,E(3X)\cdot E(2Y) =$

$= 9\,\text{Var}(X) + 4\,\text{Var}(Y) + 12\,E(XY) - 12(EX)(EY) =$

$= 9\,\text{Var}(X) + 4\,\text{Var}(Y) + 12\left[E(XY) - (EX)(EY)\right] =$

$= 9\,Var(X) + 4\,Var(Y) + 12\,Cov(X,Y) =$

$= 9\,Var(X) + 4\,Var(Y) + 12 \cdot \rho(X,Y)\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)} =$

$= 9 \cdot 9 + 4 \cdot 16 + 12 \cdot 0.2 \cdot \sqrt{9 \cdot 16} = 81 + 64 + 28.8 =$

$= 173.8$

ΘΕΜΑ 5

α) Για να είναι η $f(x,y)$ συνάρτηση πυκνότητας θα πρέπει:

i) $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, δηλ. $c \geq 0$, και

ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \int_{0}^{\infty}\int_{-y}^{y} c(y-x)e^{-y}\,dx\,dy = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^\infty ce^{-y}\left[yx - \frac{x^2}{2}\right]_{x=-y}^{x=y} dy = 1 \Rightarrow \int_0^\infty ce^{-y}\,2y^2\,dy = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[-2cy^2e^{-y}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 4cye^{-y}\,dy = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[-4cye^{-y}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 4ce^{-y}\,dy = 1 \Rightarrow \left[-4ce^{-y}\right]_0^\infty = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4c = 1 \Rightarrow c = 1/4$

β) $\displaystyle f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{|x|}^{\infty} \frac{1}{4}(y-x)e^{-y}\,dy$, μιας και $f(x,y) = 0$

εάν $x \notin [-y, y]$, δηλ. εάν $y < |x|$

άρα: $f_X(x) = \left[-\frac{(y-x)}{4}e^{-y}\right]_{y=|x|}^{\infty} + \int_{|x|}^{\infty} \frac{1}{4}e^{-y}\,dy =$

$= \left[-\frac{(y-x)}{4}e^{-y} - \frac{e^{-y}}{4}\right]_{y=|x|}^{\infty} = \frac{e^{-|x|}}{4}\left(|x|-x+1\right) \quad , \; -\infty < x < \infty$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_{-y}^{y} \frac{1}{4}(y-x)e^{-y}\,dx = \frac{e^{-y}}{4}\left[yx - \frac{x^2}{2}\right]_{x=-y}^{x=y} =$

$= \frac{e^{-y}}{4}\left[y^2 - \frac{y^2}{2} - \left(-y^2 - \frac{y^2}{2}\right)\right] = \frac{y^2}{2}e^{-y} \quad , \quad 0 < y < \infty$

ενώ για $y \leq 0$ έχουμε: $f_Y(y) = 0$

γ) $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{4}(y-x)e^{-y}}{\frac{y^2}{2}e^{-y}} = \frac{y-x}{2y^2}$ για $\begin{cases} -y \leq x \leq y, \text{ και} \\ 0 < y < \infty \end{cases}$

ενώ $f_{X|Y}(x|y) = 0$ για $\begin{cases} |x| > y \\ \text{ή} \\ y \leq 0 \end{cases}$

δ) $E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_{-y}^{y} \frac{yx - x^2}{2y^2}\,dx =$

$= \frac{1}{2y^2}\left[y\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=-y}^{x=y} = \frac{1}{2y^2}\left[\cancel{\frac{y^3}{2}} - \frac{y^3}{3} - \left(\cancel{\frac{y^3}{2}} + \frac{y^3}{3}\right)\right] = -\frac{y}{3}$

για $y > 0$, ενώ $E(X|Y=y) = 0$ για $y \leq 0$

ΘΕΜΑ 6

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & , x>0\\ 0 & , x\le 0\end{cases} \quad \text{και} \quad f_Y(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y} & , y>0\\ 0 & , y\le 0\end{cases}$$

Αφού οι X, Y είναι ανεξάρτητες, η από κοινού πυκνότητα τους $f(x,y)$ θα δίνεται ως:

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} & , \quad x>0,\ y>0\\ 0 & , \quad \text{αλλού}\end{cases}$$

Η συνάρτηση κατανομής της $Z=\frac{X}{X+Y}$ είναι ίση με:

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P\left(\frac{X}{X+Y}\le z\right)=\iint_{\frac{x}{x+y}\le z} f(x,y)\,dy\,dx=$$

$$=\iint_{\substack{\frac{x}{x+y}\le z\\ x>0,\,y>0}} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\,dy\,dx$$, όπου τα όρια του ολοκληρώματος

υπολογίζονται ως εξής: $\frac{x}{x+y}\le z \underset{\substack{x>0\\y>0}}{\Longrightarrow} x\le zx+zy \Rightarrow zy\ge x(1-z)\Rightarrow$

$$\underset{z>0}{\Longrightarrow} y\ge x\left(\frac{1}{z}-1\right)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) $0<z<1 \Rightarrow \frac{1-z}{z}>0 \underset{x>0}{\Longrightarrow} x\left(\frac{1}{z}-1\right)>0$

Οπότε: $F_Z(z)=\int_0^{\infty}\int_{x(\frac{1}{z}-1)}^{\infty}\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\,dy\,dx=$

$$= \int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda x} \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda y} \right]_{y = x\left(\frac{1}{z}-1\right)}^{\infty} dx =$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{-\lambda x\left(\frac{1}{z}-1\right)} dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x/z} dx = \left[-z e^{-\lambda x/z} \right]_0^\infty = z$$

ii) $z \geq 1 \Rightarrow \frac{1-z}{z} \leq 0 \underset{x>0}{\Rightarrow} x\left(\frac{1}{z}-1\right) \leq 0$

Οπότε: $F_Z(z) = \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} dy\, dx = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x,y)\, dy\, dx = 1$

Επομένως: $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ z, & 0 < z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases}$

και $f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \begin{cases} 1, & 0 < z < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

δηλ. η Z είναι ομοιόμορφη στο (0,1).

<u>2ος Τρόπος</u>: Έστω $U = X$ και $Z = X/(X+Y)$, και οι συναρτήσεις:

$$\left. \begin{array}{l} u = g_1(x,y) = x \\ z = g_2(x,y) = \frac{x}{x+y} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = u\left(\frac{1}{z}-1\right) \end{cases} \qquad \begin{array}{c} x>0,\ y>0 \\ \Updownarrow \qquad \Updownarrow \\ u>0,\ 0<z<1 \end{array}$$

Η από κοινού πυκνότητα των U, Z υπολογίζεται ως:

$$f_{U,Z}(u,z) = \frac{f(x,y)}{|J|} = \frac{f(x,y)}{\left|\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix}\right|} = \frac{f(x,y)}{\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{y}{(x+y)^2} & \frac{-x}{(x+y)^2} \end{vmatrix}\right|} =$$

$$= \frac{f(x,y)}{\frac{|x|}{(x+y)^2}} = \frac{f\left(u, u\left(\frac{1}{z}-1\right)\right)}{\frac{|u|}{\left(u+\frac{u}{z}-u\right)^2}} \underset{u>0}{=} \frac{\lambda^2 e^{-\lambda(u/z)}}{z^2/u} = \frac{\lambda^2 u e^{-\lambda u/z}}{z^2}$$

με $0<z<1$ και $u>0$, ενώ $f_{U,Z}(u,z)=0$ αλλού.

Άρα: $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,Z}(u,z)\, du = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 u}{z^2} e^{-\lambda u/z}\, du =$

$$= \left[\frac{\lambda^2 u}{z^2}\left(-\frac{z}{\lambda}\right) e^{-\lambda u/z}\right]_{u=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{z} e^{-\lambda u/z}\, du =$$

$$= \left[-e^{-\lambda u/z}\right]_0^{\infty} = 1 \quad \text{για } 0<z<1$$

Άρα: $f_Z(z) = \begin{cases} 1, & 0<z<1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

ΘΕΜΑ 7

Η συνάρτηση πυκνότητας της X δίνεται ως:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = -\frac{1}{2}e^{-x/2} - \frac{1}{2}(x+2)e^{-x/2}\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= e^{-x/2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{x+2}{4}\right) = \frac{x+2-2}{4}e^{-x/2} = \frac{x}{4}e^{-x/2}$$

για $x>0$

δηλ. $f(x) = \begin{cases} \frac{x e^{-x/2}}{4}, & x>0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

Έστω $y = \varphi(x) = e^{x/2}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $I=(0,\infty)$

Η αντίστροφη της φ είναι η $x = \varphi^{-1}(y) = 2\ln y$

Η συνάρτηση πυκνότητας της $Y = e^{X/2}$ θα δίνεται ως:

$$f_Y(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = f(\varphi^{-1}(y))\left|\frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy}\right| =$$

$$= \frac{2\ln y\, e^{-\cancel{2}\ln y/\cancel{2}}}{4}\cdot\left|\frac{2}{y}\right| \underset{y>0}{=} \frac{\ln y}{y^2} \text{ για } x>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y > 0 \Rightarrow y > 1$$

Άρα: $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\ln y}{y^2}, & y>1 \\ 0, & y \le 1 \end{cases}$

Η συνάρτηση κατανομής της Y υπολογίζεται ως:

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt = \int_1^y \frac{\ln t}{t^2}\,dt = \int_1^y \ln t \left(-\frac{1}{t}\right)' dt =$$

$$= \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^y + \int_1^y \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{\ln y}{y} - \left[\frac{1}{t}\right]_1^y =$$

$$= -\frac{\ln y}{y} + 1 - \frac{1}{y} = 1 - \frac{1+\ln y}{y}\,, \quad \text{για } y > 1$$

Άρα: $$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1+\ln y}{y}, & \text{για } y > 1 \\ 0, & \text{για } y \leq 1 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 8

Έστω X η σ.τ.μ. ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $(-10,10)$. Άρα:

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 0 &, \text{ για } t<-10 \\ \frac{t+10}{20} &, \text{ για } -10 \leq t \leq 10 \\ 1 &, \text{ για } t>10 \end{cases} \quad \text{και}$$

και $P(X=t)=0$, $\forall t \in R$

Εξ' ορισμού: $$Y = \begin{cases} -5 &, -10<X<-5 \\ X &, -5 \leq X \leq 5 \\ 5 &, 5<X<10 \end{cases}$$

δηλ. η Y παίρνει τιμές στο διάστημα $[-5,5]$

Άρα: $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 0$, για $y<-5$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1$, για $y \geq 5$

Για $y=-5$, έχουμε: $F_Y(-5) = P(Y \leq -5) = P(Y=-5) =$

$= P(-10<X<-5) + P(X=-5) = \frac{5}{20} + 0 = \frac{1}{4}$

Για $-5<y<5$, έχουμε: $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(Y=-5) +$

$+ P(-5<Y \leq y) = P(Y=-5) + P(-5<X \leq y) =$

$= \frac{1}{4} + \frac{y+5}{20} = \frac{y+10}{20}$

Άρα: $$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} 0 &, y<-5 \\ \frac{y+10}{20} &, -5 \leq y<5 \\ 1 &, y \geq 5 \end{cases}$$

Η Υ δεν είναι συνεχής τ.μ. αφού η $F_Y(y)$ είναι ασυνεχής στα σημεία $y=-5$ και $y=5$. Επίσης, δεν είναι διακριτή τ.μ. αφού το πεδίο τιμών της Υ δεν είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο υποσύνολο του R.

$$P(Y=-5) = F_Y(-5^+) - F(-5^-) = \frac{5}{20} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$P(Y=5) = F_Y(5^+) - F(5^-) = 1 - \frac{15}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$