ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ – ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τελικός για το μάθημα Θ. Πιθανοτήτων
10 Ιουνίου 2004

Τεκμηριώστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

1. (2 μον.) Ένα ποντίκι είναι παγιδευμένο μέσα σε ένα δωμάτιο. Υπάρχουν 4 πόρτες, μία σε κάθε τοίχο. Δυστυχώς για το ποντίκι σε κάθε μία από τις πόρτες P_1, P_2, P_3, P_4 υπάρχει και μία παγίδα. Αυτές δουλεύουν με πιθανότητες $0.3, 0.4, 0.2$ και 0.5 αντίστοιχα. Αν το ποντίκι διαλέγει τυχαία μια πόρτα,
α) Ποιά είναι η πιθανότητα το ποντίκι να ξεφύγει ;
β) Δεδομένου ότι το ποντίκι φεύγει, ποιά είναι η πιθανότητα να διάλεξε την πόρτα P_1 ;

2. (2.5 μον.) Σε ένα κουτί έχουμε 100 αριθμημένους βώλους, από το 1 έως και το 100. Τραβάμε 3 από το κουτί. Βρείτε την πιθανότητα
α) Ο μεγαλύτερος που θα βγει να είναι το 10.
β) Ο αριθμός του δεύτερου βώλου να είναι μεγαλύτερος από του πρώτου
γ) Ο αριθμός του τρίτου βώλου να είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό του δεύτερου και αυτός μεγαλύτερος από τον αριθμό του πρώτου.

3. (2 μον.) Ρίχνουμε ένα ζάρι N φορές. Έστω X η τ.μ. που μετράει το άθροισμα των ενδείξεων. Βρείτε την $E(X)$ και $E(X^2)$.

4. (2 μον.) Αν οι συνεχείς τ.μ. X , Y είναι ανεξάρτητες και έχουν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, βρείτε την συνάρτηση πυκνότητας της $Z = X + 3Y$. Ποιά είναι η $E(XY)$ και η $E(X + 3Y)$;
(Η εκθετική συνάρτηση πυκνότητας με παράμετρο λ δίνεται από τον τύπο $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$ και έχει μέση τιμή ίση με $1/\lambda$.)

5. (2.5 μον.) Αν οι τ.μ. X , Y έχουν από κοινού σ.π. που είναι ομοιόμορφη στο εσωτερικό του τριγώνου με κορυφές $(0,0), (1,2)$ και $(3,0)$. Υπολογίστε
α) την από κοινού πυκνότητα $f(x,y)$
β) την περιθώρια πυκνότητα $f_X(x)$
γ) την δεσμευμένη πυκνότητα $f(x|y)$
δ) την δεσμευμένη μέση τιμή $E(X|Y = y)$

ΟΣΟΙ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝ ΑΠΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΤΗΝ ΠΡΟΟΔΟ ΓΡΑΦΟΥΝ ΤΑ 4, 5, ΑΠΟ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΤΑ ΕΠΟΜΕΝΑ

6. (2 μον.) Αν η τ.μ. X είναι ομοιόμορφη στο $(0,1)$ και M είναι τυχαία σταθερά, βρείτε την $E(Z)$, όπου $Z = min\{X, M\}$.

7. (1.5 μον.) Άν η τ.μ. X είναι ομοιόμορφη στο $(0,1)$, βρείτε συνάρτηση g ώστε η $Y = g(X)$ να έχει συνάρτηση πυκνότητας $f_Y(y) = 2y,\ 0 \le y \le 1$

8. (2 μον.) Αν οι συνεχείς τ.μ. X , Y ειναι ανεξάρτητες και έχουν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, βρείτε την δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της X δεδομένου ότι $Z = X + Y = z$.

ΤΕΛΙΚΟΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2004

ΑΣΚΗΣΗ 1

$A_i = \{$Το ποντίκι διαλέγει την πόρτα $P_i\}$

με $i = 1, 2, 3, 4$

$\Xi = \{$Το ποντίκι ξεφεύγει$\}$

α) $P(\Xi) = P(\Xi \cap A_1) + P(\Xi \cap A_2) + P(\Xi \cap A_3) + P(\Xi \cap A_4) =$

$= P(\Xi \mid A_1) \cdot P(A_1) + P(\Xi \mid A_2) \cdot P(A_2) +$

$+ P(\Xi \mid A_3) \cdot P(A_3) + P(\Xi \mid A_4) \cdot P(A_4) =$

$= \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{4} + \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{4} + \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{4} =$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{26}{10}\right) = \frac{13}{20}$

β) $P(A_1 \mid \Xi) = \frac{P(A_1 \cap \Xi)}{P(\Xi)} = \frac{P(\Xi \mid A_1) \cdot P(A_1)}{P(\Xi)} = \frac{\frac{7}{\cancel{10}} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{13}{\cancel{20}}} = \frac{7}{26}$

ΑΣΚΗΣΗ 2

X_i = αριθμός του i-στου βόλου, $(i=1,2,3)$

α) $P(\max(X_1,X_2,X_3)=10) = P($ένα από τα X_1, X_2, X_3 να πάρει τιμή 10 και οι υπόλοιπες να πάρουν τιμή $<10) = P(E)$

$\underline{\Omega}$ = {σύνολο διατεταγμένων 3άδων που επιλέγονται από τους 100 βόλους χωρίς επανάθεση}

κάθε $\overset{\text{τέτοια}}{\text{τριάδα}}$ έχει την ίδια πιθανότητα $p = \dfrac{1}{|\underline{\Omega}|} = \dfrac{1}{(100)_3}$

$$|E| = 3 \cdot 9 \cdot 8$$

3 επιλογές για ποιο από τα X_i θα πάρει την τιμή 10

9 επιλογές για την άλλη τιμή

8 επιλογές για την τρίτη τιμή

Άρα $P(\max(X_1,X_2,X_3)=10) = \dfrac{|E|}{|\underline{\Omega}|} = \dfrac{3\cdot 9\cdot 8}{(100)_3} = \dfrac{3\cdot 9\cdot 8}{100\cdot 99\cdot 98}$

2ος Τρόπος: Διαμέριση 100 βόλων: $\begin{cases} 9 & \text{με τιμή } <10 \\ 1 & \text{με τιμή } =10 \\ 90 & \text{με τιμή } >10 \end{cases}$

$$P(\max(X_1,X_2,X_3)=10) = \frac{\binom{9}{2}\binom{1}{1}\binom{90}{0}}{\binom{100}{3}} = \frac{(9)_2\cdot 3!}{2!\,(100)_3} = \frac{3\cdot(9)_2}{(100)_3} = \frac{3\cdot 9\cdot 8}{100\cdot 99\cdot 98}$$

β) $P(X_2 > X_1) = \sum_{k=1}^{99} P(X_1 = k,\ X_2 > X_1) =$

$= \sum_{k=1}^{99} P(X_1 = k,\ X_2 > k) = \sum_{k=1}^{99} P(X_1 = k) \cdot P(X_2 > k \setminus X_1 = k) =$

$= \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{100} \cdot \frac{100-k}{99} = \sum_{k=1}^{99} \left(\frac{1}{99} - \frac{k}{99 \cdot 100} \right) = 1 - \frac{1}{99 \cdot 100} \sum_{k=1}^{99} k =$

$= 1 - \frac{99 \cdot 100}{2 \cdot 99 \cdot 100} = \frac{1}{2}$

γ) $P(X_3 > X_2 > X_1) = \sum_{k=2}^{99} P(X_3 > X_2,\ X_2 = k,\ X_1 < X_2) =$

$= \sum_{k=2}^{99} P(X_3 > k,\ X_2 = k,\ X_1 < k) =$

$= \sum_{k=2}^{99} P(X_3 > k \setminus (X_2 = k,\ X_1 < k)) \cdot P(X_2 = k,\ X_1 < k) =$

$= \sum_{k=2}^{99} P(X_3 > k \setminus (X_2 = k,\ X_1 < k)) \cdot P(X_2 = k \setminus X_1 < k) \cdot P(X_1 < k) =$

$= \sum_{k=2}^{99} \frac{100-k}{98} \cdot \frac{1}{99} \cdot \frac{k-1}{100} = \frac{1}{100 \cdot 99 \cdot 98} \sum_{k=2}^{99} (101k - k^2 - 100) =$

$= \frac{1}{100 \cdot 99 \cdot 98} \left[101 \left(\frac{99 \cdot 100}{2} - 1 \right) - \left(\frac{99(99+1) \cdot (2 \cdot 99 + 1)}{6} - 1 \right) - 100 \cdot 98 \right]$

$= \frac{1}{6}$

ή πιο απλά: αν διατάξουμε τα X_1, X_2, X_3 κατά φθίνουσα σειρά (δηλ. η διάταξη $[X_2, X_1, X_3]$ να αντιστοιχεί σε $X_2 > X_1 > X_3$) τότε έχουμε συνολικά $3! = 6$ ισοπίθανες διατάξεις από τις οποίες μόνον μία ικανοποιεί την $X_3 > X_2 > X_1$, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $1/6$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Y_i = ένδειξη του ζαριού στην i-στη ρίψη

Άρα: $X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$

$EX = \sum_{i=1}^{N} EY_i$, όπου $EY_i = \sum_k k\,P(Y_i = k)$

Όμως η Y_i είναι ομοιόμορφη στο $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

δηλαδή $P(Y_i = k) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & k = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Επομένως $EY_i = \sum_{k=1}^{6} k\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k = \frac{6(6+1)}{2\cdot 6} = \frac{7}{2}$

Άρα: $EX = \sum_{i=1}^{N} \frac{7}{2} = \frac{7}{2}N$

Για την X^2 έχουμε: $X^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N} Y_j\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow X^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(Y_i Y_j) \Rightarrow EX^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} E(Y_i Y_j)$

όπου $E(Y_i Y_j) = \begin{cases} (EY_i)(EY_j), & i \neq j \\ E(Y_i^2), & i = j \end{cases}$ επειδή Y_i, Y_j ανεξάρτητες για $i \neq j$

Έχουμε: $(EY_i)(EY_j) = \frac{7}{2}\cdot\frac{7}{2} = \frac{49}{4}$ για $i \neq j$, και

$E(Y_i^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2 P(Y_i = k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{1}{\cancel{6}}\,\frac{\cancel{6}(6+1)(2\cdot 6+1)}{6} = \frac{91}{6}$

Άρα: $E(Y_i Y_j) = \begin{cases} \dfrac{49}{4}, & i \neq j \\ \dfrac{91}{6}, & i = j \end{cases}$

Οπότε $E(X^2) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} E(Y_i Y_j) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \left(\dfrac{49}{4}\right) + \sum_{i=1}^{N} \dfrac{91}{6} =$

$$= \sum_{i=1}^{N} (N-1)\frac{49}{4} + \frac{91}{6}N = N(N-1)\frac{49}{4} + \frac{91}{6}N = \frac{7N}{12}(21N+5)$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & , x>0\\ 0 & , x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y} & , y>0\\ 0 & , y\le 0\end{cases}$$

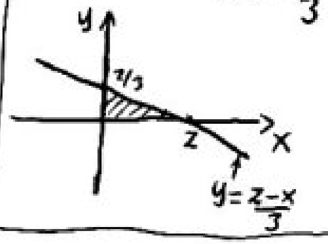
X, Y ανεξάρτητες $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)$

δηλ. $$f(x,y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} & , x>0, y>0\\ 0 & , \text{αλλιώς}\end{cases}$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+3Y\le z)=\iint\limits_{\substack{x+3y\le z\\ x>0,\,y>0}} f(x,y)\,dy\,dx=$$

$$=\int_0^z\int_0^{\frac{z-x}{3}}\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\,dy\,dx=$$

$x+3y\le z \Leftrightarrow y\le \frac{z-x}{3}$



$$=\int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda x}\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda y}\right]_0^{\frac{z-x}{3}}dx=\int_0^z \lambda e^{-\lambda x}\left(1-e^{-\lambda(z-x)/3}\right)dx=$$

$$=\int_0^z\left(\lambda e^{-\lambda x}-\lambda e^{-\lambda(2x+z)/3}\right)dx=\left[-e^{-\lambda x}+\frac{3}{2}e^{-\lambda(2x+z)/3}\right]_0^z=$$

$$=-e^{-\lambda z}+\frac{3}{2}e^{-\lambda z}+1-\frac{3}{2}e^{-\lambda z/3}=1-\frac{1}{2}e^{-\lambda z/3}\left(3-e^{-2\lambda z/3}\right)$$

για $z>0$

Δηλ. η συνάρτηση κατανομής της $Z = X + 3Y$ είναι:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda z/3}\left(3 - e^{-2\lambda z/3}\right) & , \quad z > 0 \\ 0 & , \quad z \leq 0 \end{cases}$$

οπότε η συνάρτηση πυκνότητας της Z είναι:

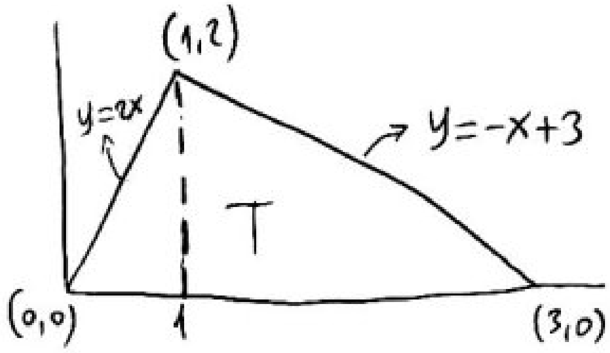
$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda z/3}\left(1 - e^{-2\lambda z/3}\right) \quad , \quad z > 0$$

και $f_Z(z) = 0 \quad , \quad z \leq 0$

*Αφού X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow E(XY) = (EX)(EY) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}$

Επίσης, έχουμε: $E(X + 3Y) = (EX) + 3(EY) = \frac{1}{\lambda} + \frac{3}{\lambda} = \frac{4}{\lambda}$

ΑΣΚΗΣΗ 5



$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x - y = 0$$

δηλ. $y = 2x$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3(y-2) + (2x-y) = 0$$

δηλ. $y = -x + 3$

α) $f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in T, \text{ δηλ. } \begin{bmatrix} 0<y<2x \text{ αν } 0<x<1 \\ \text{ή } 0<y<-x+3 \text{ αν } 1 \le x < 3 \end{bmatrix} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1\int_0^{2x} c\,dy\,dx + \int_1^3\int_0^{(-x+3)} c\,dy\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 2cx\,dx + \int_1^3 c(3-x)\,dx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [cx]_0^1 + c\left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_1^3 = 1 \Rightarrow c + c\left[9 - \frac{9}{2} - 3 + \frac{1}{2}\right] = 1$$

$$\Rightarrow c + c[6-4] = 1 \Rightarrow 3c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{3} = \frac{1}{\text{Εμβαδόν}(T)}$$

δηλ. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & (x,y) \in T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

β) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_0^{2x} \frac{1}{3}\,dy = \frac{2x}{3}, & 0 < x \le 1 \\ \int_0^{-x+3} \frac{1}{3}\,dy = 1 - \frac{x}{3}, & 1 < x < 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

γ) $f(x \mid y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_{\frac{y}{2}}^{3-y} \frac{1}{3}\,dx = 1 - \frac{y}{3} - \frac{y}{6} = 1 - \frac{y}{2} \quad , \; 0<y<2$$

$f_Y(y) = 0 \quad , \; y \notin (0,2)$

Άρα $f(x \mid y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{y}{2}} = \dfrac{2}{3(2-y)} \quad , \; (x,y) \in T$

δ) $$E(X \mid Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x \mid y)\,dx = \int_{y/2}^{3-y} \frac{2x}{3(2-y)}\,dx = \frac{1}{3(2-y)} \Big[x^2 \Big]_{y/2}^{3-y} =$$

$$= \frac{1}{3(2-y)} \left[9 + y^2 - 6y - \frac{y^2}{4} \right] = \frac{(y-6)(y-2)}{4(2-y)} = \frac{6-y}{4} \quad , \; y \in (0,2)$$

$E(X \mid Y=y) = 0 \quad , \; y \notin (0,2)$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Η συνάρτηση κατανομής της Z είναι ίση με:

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(\min(X,M) \le z) = 1 - P(\min(X,M) > z) =$$

$$= 1 - P(X>z, M>z) \underset{\substack{\uparrow \\ X,M \\ \text{ανεξ.}}}{=} 1 - P(X>z)\cdot P(M>z) =$$

$$= 1 - \left[1 - P(X \le z)\right]\cdot P(M>z) =$$

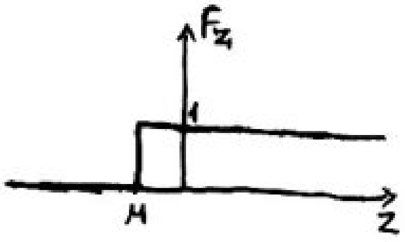
$$= 1 - \left[1 - F_X(z)\right]\cdot P(M>z) \quad , \quad \text{όπου } F_X(z) = \begin{cases} 0 & , \ z<0 \\ z & , \ 0 \le z \le 1 \\ 1 & , \ z>1 \end{cases}$$

όμως: $P(M>z) = \begin{cases} 1 & , \ z<M \\ 0 & , \ z \ge M \end{cases}$

Άρα: $F_Z(z) = \begin{cases} F_X(z) & , \ z<M \\ 1 & , \ z \ge M \end{cases}$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

i) $M \le 0$, τότε: $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & , \ z < M \\ 1 & , \ z \ge M \end{cases}$



η οποία δεν είναι συνεχής.

Συγκεκριμένα στο σημείο $z=M$ έχουμε:

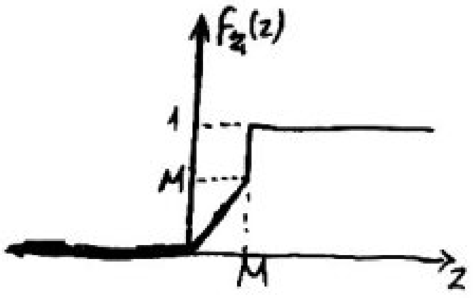
$$F(M^+) - F(M^-) = P(Z=M) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(Z=M) = 1 - 0 \Rightarrow P(Z=M) = 1$$

δηλ. η Z είναι σταθερά και ίση με M οπότε

$f_Z(z) = \begin{cases} 1 & , \ z=M \\ 0 & , \ z \ne M \end{cases}$ και $EZ = \sum_z z f_Z(z) = M \cdot 1 = M$

ii) $0<M<1$, τότε: $F_{Z_1}(z)=\begin{cases}0 & z<0\\ z & 0\le z<M\\ 1 & z\ge M\end{cases}$



η οποία είναι ασυνεχής στο $z=M$

οπότε: $P(Z_1=M)=F(M^+)-F(M^-)\Rightarrow$

$\Rightarrow P(Z_1=M)=1-M$

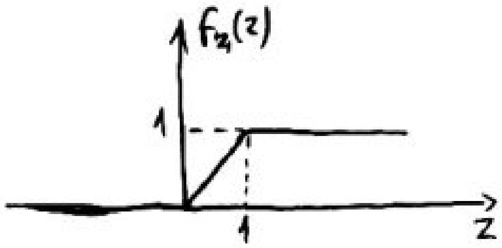
ενώ στην περιοχή $-\infty<z<M$ που η $F_{Z_1}(z)$ είναι συνεχής έχουμε την πυκνότητα $f_{Z_1}(z)=\dfrac{dF_{Z_1}(z)}{dz}=\begin{cases}1, & 0<z<M\\ 0, & z\le 0\end{cases}$

Άρα η Z_1 δεν είναι ούτε διακριτή ούτε συνεχής. Η μέση τιμή της δίνεται ως:

$$EZ_1=\int_{-\infty}^{M} z f_{Z_1}(z)dz+\sum_{z\ge M} z\,P(Z_1=z)=\int_0^M z\,dz+M\cdot 1-M)=$$

$$=\frac{M^2}{2}+M(1-M)=\frac{M^2}{2}+M-M^2=M-\frac{M^2}{2}=M\left(1-\frac{M}{2}\right)$$

iii) $M\ge 1$, τότε $F_{Z_1}(z)=F_X(z)=\begin{cases}0 & z<0\\ z & 0\le z\le 1\\ 1 & z>1\end{cases}$



Άρα Z_1 συνεχής και

$f_{Z_1}(z)=\begin{cases}1, & 0<z<1\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$

$$EZ_1=\int_{-\infty}^{\infty} z f_{Z_1}(z)dz=\int_0^1 z\,dz=\frac{z^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι η $g(x)$ είναι γνησίως μονότονη και παραγωγίσιμη στο διάστημα I και $g(I) = (0,1)$ το σύνολο τιμών της

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|$$

δηλ. $2y = 1 \cdot \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|$, $0<g^{-1}(y)<1$

$0<y<1$

οπότε $\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \pm 2y \underset{y>0}{\Rightarrow} \frac{dg^{-1}(y)}{dy} = 2y \Rightarrow g^{-1}(y) = y^2 + c$

όπου $0<g^{-1}(y)<1 \Rightarrow 0<y^2+c<1 \Rightarrow -c<y^2<1-c$

όμως $0<y<1 \Rightarrow 0<y^2<1 \Rightarrow c=0$

Άρα $g^{-1}(y) = y^2 \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη στο $I=(0,1)$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Αφού X, Y ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, θα έχουν τις ακόλουθες πυκνότητες:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y>0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

Ψάχνουμε την $f_{X|Z}(x|z) = \dfrac{f_{X,Z}(x,z)}{f_Z(z)}$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\, dx$$

$\{X, Y \text{ ανεξάρτ}\} \Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

Άρα: $f_Z(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx$

η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι μη-μηδενική για $x>0$ και $z-x>0$ δηλ. για $0<x<z$

Οπότε $f_Z(z) = \displaystyle\int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)}\, dx = \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda z}\, dx \Rightarrow$

$\Rightarrow f_Z(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}, \quad z>0$

και $f_Z(z) = 0$, για $z \le 0$

<u>Εναλλακτικά</u>: $X, Y \sim \mathcal{E}(\lambda) = \Gamma(1,\lambda)$ και είναι ανεξάρτητες

άρα $X+Y \sim \Gamma(2,\lambda) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}, \; z>0$

Για τον υπολογισμό της $f_{X,Z}(x,z)$ θεωρούμε τις συναρτήσεις: $U = X$ και $Z = X+Y$, το σύστημα των οποίων μπορεί να λυθεί ως προς x και y και να δώσει: $\begin{cases} x = u \\ y = z-u \end{cases}$

Η Ιακωβιανή $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Άρα: $f_{X,Z}(x,z) = f_{U,Z}(u,z) = f_{X,Y}(x,y)\dfrac{1}{|J|} =$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ανεξ.}}}{=} f_X(x)\cdot f_Y(y) = f_X(x)\cdot f_Y(z-u) = f_X(x)\cdot f_Y(z-x) =$$

$$= \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+z-x)} = \lambda^2 e^{-\lambda z} & , \ z>0, \ 0<x<z \\ 0 & , \ \text{αλλού} \end{cases}$$

Άρα: $f_{X|Z}(x|z) = \dfrac{\lambda^2 e^{-\lambda z}}{z\lambda^2 e^{-\lambda z}} = \dfrac{1}{z} \ , \ z>0 \ , \ 0<x<z$