A

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θέματα εξέτασης προόδου στο μάθημα «Πιθανότητες» (ΕΜ161)

Ηράκλειο, 16 Απριλίου 2005

Θέμα 1ο (μονάδες 2): Ένα εργοστάσιο παράγει ένα εξάρτημα σε τρεις τύπους Α, Β και Γ. Επί του συνόλου των παραγόμενων εξαρτημάτων το 25% είναι του τύπου Α, το 35% του τύπου Β και το 40% του τύπου Γ. Από τα εξαρτήματα του τύπου Α το 5% είναι ελαττωματικά, από τα εξαρτήματα του τύπου Β το 4% είναι ελαττωματικά, και από τα εξαρτήματα του τύπου Γ το 2% είναι ελαττωματικά. Αν κάποιος πελάτης προμηθευτεί ένα ελαττωματικό εξάρτημα, βρείτε:
α) Ποια είναι η πιθανότητα να είναι τύπου Α.
β) Ποια είναι η πιθανότητα να είναι τύπου Β.
γ) Ποια είναι η πιθανότητα να είναι τύπου Γ.

Θέμα 2ο (μονάδες 1.5): Τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας μοιράζονται σε 4 παίχτες Α, Β, Γ και Δ (ο καθένας παίρνει 13). Ποια είναι η πιθανότητα ο παίχτης Γ να έχει 4 σπαθιά, δεδομένου ότι οι παίχτες Α και Β (μαζί) έχουν 6 σπαθιά;

Θέμα 3ο (μονάδες 1.5): Οκτώ (8) παίχτες διαλέγονται τυχαία από δυο ποδοσφαιρικές ομάδες, οι οποίες αποτελούνται από 11 παίχτες η καθεμιά, με αριθμούς στις φανέλες τους από 1 έως 11. Ποια είναι η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον δυο παίχτες με τον ίδιο αριθμό φανέλας μεταξύ των οκτώ που επιλέχθηκαν.

Θέμα 4ο (μονάδες 2.5): Ένα δοχείο περιέχει 14 βόλους από τους οποίους 5 είναι κόκκινοι. Τρία άτομα Α, Β και Γ παίζουν το εξής παιχνίδι: Ο Γ τραβάει διαδοχικά βόλους από το δοχείο με επανατοποθέτηση του κάθε βόλου που επιλέγεται. Αν ο πρώτος κόκκινος βόλος εμφανιστεί στην 1η δοκιμή ο Α πληρώνει τον Β με 1 €. Αν ο πρώτος κόκκινος βόλος εμφανιστεί στη n-οστή δοκιμή με $n = 2,3,...,$ ο Β δίνει στον Α το χρηματικό ποσό των α^{n-1} €. Βρείτε την τιμή του α για να είναι το παιχνίδι τίμιο (δηλαδή η αναμενόμενη τιμή του κέρδους για κάθε παίχτη να είναι ίση με μηδέν).

Θέμα 5ο (μονάδες 2.5): Σε μια τράπουλα 52 χαρτιών υπάρχουν 4 άσοι και 4 βαλέδες. Επιλέγουμε τυχαία ένα χαρτί από την τράπουλα και σημειώνουμε την τιμή όψης του. Στη συνέχεια επιστρέφουμε το χαρτί στην τράπουλα. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνολικά 12 φορές. Αν X είναι το πλήθος των άσων και Y το πλήθος των βαλέδων που εμφανίζονται, τότε υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(X = k \setminus X + Y = m)$ και τη δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}(X \setminus X + Y = m)$.

Σημείωση: Μια τράπουλα έχει 52 χαρτιά. Αυτά τα χαρτιά σχηματίζουν 4 οικογένειες που λέγονται μπαστούνια, καρό, κούπες, και σπαθιά. Κάθε οικογένεια έχει 13 χαρτιά με τιμές όψης 2, 3, 4, ..., 10, *J*, *Q*, *K*, *A*.

Χρήσιμα αθροίσματα:

$$\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^{N}(2k+1) = (N+1)^2, \quad \sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}, \quad \sum_{k=0}^{N} x^k = \frac{1-x^{N+1}}{1-x},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k r^k = \frac{r}{(1-r)^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k^2 r^k = \frac{r(1+r)}{(1-r)^3}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k} = -\ln(1-r),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \quad \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^k y^{N-k} = (x+y)^N,$$

όπου: N θετικός ακέραιος, $x, y \in R$ και $|r| < 1$.

B

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θέματα εξέτασης προόδου στο μάθημα «Πιθανότητες» (ΕΜ161)

Ηράκλειο, 16 Απριλίου 2005

Θέμα 1^{ο} (μονάδες 2): Οι φοιτητές μιας πανεπιστημιακής σχολής κατάγονται κατά ποσοστό 20% από πόλεις με πληθυσμό μεγαλύτερο από 500,000 κατοίκους, κατά 30% από πόλεις με πληθυσμό από 50,000 έως 500,000 κατοίκους και κατά 50% από χωριά ή πόλεις με πληθυσμό μικρότερο από 50,000 κατοίκους. Το ποσοστό των φοιτητών που δεν γνωρίζει μια γλώσσα προγραμματισμού είναι 40%, 60% και 80% αντίστοιχα προς τις τρεις προηγούμενες κατηγορίες φοιτητών. Να βρεθεί η πιθανότητα ένας φοιτητής που δεν γνωρίζει γλώσσα προγραμματισμού, να κατάγεται από:
α) πόλη που έχει περισσότερους από 500,000 κατοίκους.
β) πόλη που έχει από 50,000 έως 500,000 κατοίκους.
γ) χωριό ή πόλη που έχει λιγότερους από 50,000 κατοίκους.

Θέμα 2^{ο} (μονάδες 1.5): Τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας μοιράζονται σε 4 παίχτες Α, Β, Γ και Δ (ο καθένας παίρνει 13). Ποια είναι η πιθανότητα ο Γ να έχει έναν άσο, δεδομένου ότι οι παίχτες Α και Β (μαζί) έχουν 2 άσους;

Θέμα 3^{ο} (μονάδες 1.5): Από μια τράπουλα ξεχωρίζουμε τα 13 σπαθιά και εκτελούμε το ακόλουθο πείραμα: Επιλέγουμε τυχαία ένα χαρτί από αυτήν την 13άδα και σημειώνουμε την τιμή όψης του. Στη συνέχεια επιστρέφουμε το χαρτί στην 13άδα. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνολικά 8 φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε τραβήξει τουλάχιστον έναν άσο, αν ξέρουμε ότι και τα 8 χαρτιά είναι διαφορετικά μεταξύ τους;

Θέμα 4^{ο} (μονάδες 2.5): Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα μέχρι να φέρουμε δυο συνεχόμενες φορές την ίδια ένδειξη. Αν X είναι το πλήθος των απαιτούμενων ρίψεων, βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας και τη μέση τιμή της X; Υπολογίστε την πιθανότητα να σταματήσουμε σε άρτιο αριθμό ρίψεων.

Θέμα 5^{ο} (μονάδες 2.5): Από ένα κουτί που περιέχει 12 κόκκινους, 8 πράσινους και 10 μαύρους βόλους, επιλέγουμε ένα βόλο και σημειώνουμε το χρώμα του. Στη συνέχεια επιστρέφουμε το βόλο στο κουτί. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία 8 φορές. Αν X είναι το πλήθος των κόκκινων και Y το πλήθος των πράσινων βόλων που εμφανίζονται, τότε υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(X=k \setminus X+Y=m)$ και τη δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}(X \setminus X+Y=m)$.

Σημείωση: Μια τράπουλα έχει 52 χαρτιά. Αυτά τα χαρτιά σχηματίζουν 4 οικογένειες που λέγονται μπαστούνια, καρό, κούπες, και σπαθιά. Κάθε οικογένεια έχει 13 χαρτιά με τιμές όψης 2, 3, 4, ..., 10, J, Q, K, A.

Χρήσιμα αθροίσματα:

$$\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^{N} (2k+1) = (N+1)^2, \quad \sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}, \quad \sum_{k=0}^{N} x^k = \frac{1-x^{N+1}}{1-x},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} kr^k = \frac{r}{(1-r)^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k^2 r^k = \frac{r(1+r)}{(1-r)^3}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k} = -\ln(1-r),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \quad \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^k y^{N-k} = (x+y)^N,$$

όπου: N θετικός ακέραιος, $x, y \in R$ και $|r| < 1$.