ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ -ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θέματα εξέτασης στο μάθημα «Γραμμική Άλγεβρα Ι» (ΕΜ111)

Ηράκλειο, 24 Μαρτίου 2007

Θέμα 1. (μονάδες 2.5)

Έστω το σύστημα $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$, με αγνώστους $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

α) [*μονάδες: 0.5*]. Γράψτε το σύστημα στη μορφή $Ax = b$ και δείξτε ότι έχει μοναδική λύση.
β) [*μονάδες: 0.8*]. Υπολογίστε τον αντίστροφο του πίνακα *A*.
γ) [*μονάδες: 0.6*]. Βρείτε τη λύση του συστήματος.
δ) [*μονάδες: 0.6*]. Διασπάστε τον *A* σε ένα γινόμενο *LU* (όπου *L* είναι κάτω τριγωνικός πίνακας με μονάδες στη διαγώνιο και *U* άνω τριγωνικός πίνακας).

Θέμα 2. (μονάδες 2.0)

α) [*μονάδες: 1.2*] Εξετάστε αν τα διανύσματα $v_1 = (1,3,-1,2)$, $v_2 = (2,6,5,8)$, $v_3 = (-1,-3,22,10)$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή όχι και ελέγξτε εάν το διάνυσμα $v_4 = (1,1,1,1)$ βρίσκεται στο χώρο που παράγουν.
β) [*μονάδες: 0.8*] Βρείτε τα μήκη και το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $v = (-1,3,2,0)$ και $w = (-4,7,1,3)$, καθώς και τη μεταξύ τους απόσταση και γωνία.

Θέμα 3. (μονάδες 1.5)

Έστω το σύνολο $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \ x - 3y + 2z = 0\}$.

α) [*μονάδες: 0.6*] Δείξτε ότι το *V* είναι πραγματικός διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.
β) [*μονάδες: 0.9*] Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του *V*.

Θέμα 4. (μονάδες 2.5)

Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται από τη σχέση:

$$f(x,y,z) = (x + y - z, 3x - y + 5z, x + 3y - 5z), \quad \forall\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

α) [*μονάδες: 0.7*] Βρείτε τον πίνακα *A* της απεικόνισης *f* ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.
β) [*μονάδες: 1.2*] Να βρεθούν οι διαστάσεις και βάσεις των $\ker f$ και $\operatorname{Im} f$.
γ) [*μονάδες: 0.3*] Είναι η απεικόνιση “επί”;
δ) [*μονάδες: 0.3*] Είναι η απεικόνιση “1-1”;

Θέμα 5. (μονάδες 2.5)

α) [*μονάδες: 1.0*] Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$. Να βρεθούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(\lambda)$ και οι ιδιοτιμές του *A*.
β) [*μονάδες: 1.0*] Δείξτε ότι ο *A* διαγωνιοποιείται και βρείτε ένα πίνακα *P* που τον διαγωνιοποιεί, καθώς και τον αντίστοιχο διαγώνιο *D*.
γ) [*μονάδες: 0.5*] Περιγράψτε ένα τρόπο υπολογισμού του A^{100} χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του ερωτήματος β.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (ΕΜ 111)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΜΑΡΤΙΟΥ 2007 (ΤΕΥ)

ΘΕΜΑ 1

α)
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(1+2) - 3(4-2) - (-4-1) = 6-6-(-5) = 5 \neq 0$$

Επομένως, $\det A \neq 0$ και άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση

β) Εφαρμόζουμε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} 2 \quad 1/2 \\ (-) \\ (-) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5/2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ 1/2 \\ (-) \end{array} \longrightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow (-) \\ \leftarrow (-) \\ (-8) \quad 2 \end{array} \longrightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow (-) \\ (-3/5) \\ \end{array} \longrightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 6/5 & -4/5 & \frac{14}{5} \\ 0 & -5 & 0 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot 1/2 \\ \cdot (-1/5) \\ \cdot (-2) \end{array} \longrightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/5 & -2/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & 0 & -2/5 & 3/5 & -8/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Άρα: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 & 7/5 \\ -2/5 & 3/5 & -8/5 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

γ) $AX = b \Rightarrow X = A^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 & 7/5 \\ -2/5 & 3/5 & -8/5 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} - 2 + \frac{14}{5} \\ -\frac{2}{5} + 3 - \frac{16}{5} \\ -1 + 5 - 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ -3/5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

δ) Από τα ενδιάμεσα στάδια της απαλοιφής στο ερώτημα (β), έχουμε ήδη βρει ότι:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

, ενώ από τους πολλ/στές που χρησιμοποιήθηκαν στην απαλοιφή ως εκείνο το στάδιο που εμφανίζεται ο U, προκύπτει ότι

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

ΘΕΜΑ 2

α) Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 = \mathbf{0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 22 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ -1 & 5 & 22 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ -1 & 5 & 22 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 & (-1) & 2 \\ (-) & & \\ & (-) & \\ & & (-) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 21 \\ 0 & 4 & 12 \end{bmatrix} \text{εναλλαγή} \longrightarrow$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 7 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 7/4 \\ (-) \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

$r(A) = [\text{πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του } U] \Rightarrow r(A) = 2$

$\dim N(A) = n - r(A) = 3 - 2 = 1 \neq 0$

άρα το σύστημα (1) έχει και μη-μηδενικές λύσεις $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq$
$\neq (0,0,0)$, οπότε τα v_1, v_2, v_3 είναι <u>γραμμικώς εξαρτημένα</u>

Για να ανήκει το $v_4 = (1,1,1,1)$ στο χώρο που παράγουν τα v_1, v_2, v_3 θα πρέπει να $\exists\, x, y, z \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$x v_1 + y v_2 + z v_3 = v_4 \iff A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Εφαρμόζοντας στο v_4 τα ίδια στάδια απαλοιφής που εφαρμόστηκαν για να προκύψει ο U από τον A

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3,\ (-1),\ 2\ (-)} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{εναλλαγή}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{7/4\ (-)} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 15/4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Άρα το σύστημα (2) γίνεται:

$$U \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 15/4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

, όπου η τελευταία εξίσωση δίνει

$0x + 0y + 0z = -2$. Άρα, το σύστημα δεν έχει λύση και επομένως $v_4 \notin \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

β) $\|V\| = \sqrt{(-1)^2+3^2+2^2+0^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$

$\|W\| = \sqrt{(-4)^2+7^2+1^2+3^2} = \sqrt{16+49+1+9} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

Εσωτερικό γινόμενο:

$V \cdot W = (-1)(-4) + 3\cdot 7 + 2\cdot 1 + 0\cdot 3 = 4+21+2 = 27$

Απόσταση μεταξύ των V και W:

$\|V-W\| = \sqrt{(-1+4)^2+(3-7)^2+(2-1)^2+(0-3)^2} =$

$= \sqrt{3^2+(-4)^2+1^2+(-3)^2} = \sqrt{9+16+1+9} = \sqrt{35}$

Γωνία μεταξύ V, W:

$$\cos\theta = \frac{V\cdot W}{\|V\|\|W\|} = \frac{27}{\sqrt{14}\ 5\sqrt{3}} = \frac{27}{5\sqrt{42}}$$

Άρα $\theta = \arccos\left(\frac{27}{5\sqrt{42}}\right)$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ 3}}$

α) Αρκεί να δειχθεί ότι το $\mathbb{V}$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό με κάθε πραγματικό αριθμό.
Για να δειχθούν και τα δύο αρκεί να δείξουμε ότι

$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 \in \mathbb{V}$, $\forall\ V_1, V_2 \in \mathbb{V}$ και $\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Έστω $V_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $V_2 = (x_2, y_2, z_2)$ με $V_1, V_2 \in \mathbb{V}$, δηλαδή

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 3y_1 + 2z_1 = 0 \\ x_2 - 3y_2 + 2z_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Έχουμε: $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 = (\lambda_1 x_1, \lambda_1 y_1, \lambda_1 z_1) + (\lambda_2 x_2, \lambda_2 y_2, \lambda_2 z_2) =$

$= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2,\ \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = (\alpha, \beta, \gamma)$

και $(1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 x_1 - 3\lambda_1 y_1 + 2\lambda_1 z_1 = 0 \\ \lambda_2 x_2 - 3\lambda_2 y_2 + 2\lambda_2 z_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - 3(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + 2(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha - 3\beta + 2\gamma = 0$ δηλ. $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V$

Επομένως, το V είναι πραγματικός διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

β) $\forall \; v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in V$ έχουμε: $v = \begin{bmatrix} 3y - 2z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

δηλ. $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ όπου $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Επίσης, $\nexists \; \lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω. $v_1 = \lambda v_2$. Άρα, τα v_1, v_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επειδή παράγουν τον V, το $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ είναι μια βάση του V. Επομένως, $\boxed{\dim V = 2}$

ΘΕΜΑ 4

α) Έστω $\mathbb{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, δηλ. $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Ο πίνακας A της απεικόνισης f ως προς τη βάση $\mathbb{E}$ έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ ως προς $\mathbb{E}$. Έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} f(e_1) = f(1,0,0) = (1,3,1) \\ f(e_2) = f(0,1,0) = (1,-1,3) \\ f(e_3) = f(0,0,1) = (-1,5,-5) \end{array} \right\} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

β) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \left(-\tfrac{1}{2}\right) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$

$\dim(\mathrm{Im} f) = \dim R(A) = r(A) = [$μη-μηδενικές γραμμές του $U] = 2$

$\dim(\ker f) = \dim N(A) = n - r(A) = 3 - 2 = 1$

{μια βάση του $\mathrm{Im} f$} = {μια βάση του $R(A)$} =

= {στήλες του A που αντιστοιχούν σε στήλες του U με οδηγούς} =

= {$1_η$, $2_η$ στήλη του A} $= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

Επίσης, $AX = 0 \Leftrightarrow UX = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -4X_2 + 8X_3 = 0 \Leftrightarrow X_2 = 2X_3 \\ X_1 + X_2 - X_3 = 0 \Rightarrow X_1 + X_3 = 0 \Leftrightarrow X_1 = -X_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = X_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_3 \in \mathbb{R}$$

{μια βάση του $\ker f$} = {μια βάση του $N(A)$} $= \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

γ) $r(A) = 2 < m = 3$ άρα η f δεν είναι "επί"

δ) $r(A) = 2 < n = 3$ » η f » » "1-1"

ΘΕΜΑ 5

α) $X_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & 4-\lambda\end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & 4-\lambda\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1-\lambda & -2\end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(4-\lambda)-4\right] + (\lambda-4+4) + 2\left[2-2(1-\lambda)\right] =$$

$$= (1-\lambda)^2(4-\lambda) - 4(1-\lambda) + \lambda + 4 - 4(1-\lambda) = (1-\lambda)^2(4-\lambda) + 9\lambda - 4 =$$

$$= (1+\lambda^2-2\lambda)(4-\lambda) + 9\lambda - 4 = 4 + 4\lambda^2 - 8\lambda - \lambda - \lambda^3 + 2\lambda^2 + 9\lambda - 4 =$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2$$

δηλ. χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A: $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2$

$$\chi_A(\lambda) = 0 \iff -\lambda^3 + 6\lambda^2 = 0 \iff \left.\begin{cases}\lambda = 0 \ (\text{διπλή}) \\ \quad\text{ή} \\ \lambda = 6\end{cases}\right\} \text{ ιδιοτιμές του } A$$

β) Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0$ έχουμε:

$$A - \lambda_1 I = A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{matrix}(-1) & 2\\ \leftarrow(-) & \\ & \leftarrow(-)\end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Άρα: $(A-\lambda_1 I)X = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 - 2x_3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2 - 2x_3\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

Επομένως: $\{\text{μια βάση του } V_0(A) = N(A-\lambda_1 I)\} = \mathbb{B}_0 = \left\{\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\right\}$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 6$ έχουμε:

$$A - \lambda_2 I = A - 6I = \begin{bmatrix}-5 & -1 & 2\\ -1 & -5 & -2\\ 2 & -2 & -2\end{bmatrix}\begin{matrix}(1/5) & (-2/5)\\ \leftarrow(-) & \\ & \leftarrow(-)\end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}-5 & -1 & 2\\ 0 & -24/5 & -\frac{12}{5}\\ 0 & -12/5 & -\frac{6}{5}\end{bmatrix}\begin{matrix}1/2\\ \leftarrow(-)\end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix}-5 & -1 & 2\\ 0 & -24/5 & -12/5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Άρα: $(A-\lambda_2 I)X=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -24X_2-12X_3=0 \Rightarrow X_2=-\frac{1}{2}X_3 \\ -5X_1-X_2+2X_3=0 \Rightarrow 5X_1=\frac{5}{2}X_3 \Rightarrow X_1=\frac{1}{2}X_3 \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = X_3 \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\quad X_3 \in \mathbb{R}$

Επομένως: $\{$μια βάση του $V_6(A)=N(A-\lambda_2 I)\} = \mathbb{B}_6 = \left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Έστω $\mathbb{B} = \mathbb{B}_0 \cup \mathbb{B}_6 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Το $\mathbb{B}$ έχει 3 διανύσματα. Άρα, ο A έχει 3 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, και επειδή $3=n$, ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος

Ο πίνακας $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (με στήλες τα διανύσματα του $\mathbb{B}$)

διαγωνιοποιεί τον A και $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ είναι ο διαγώνιος

που είναι όμοιος με τον A μέσω της σχέσης $D=P^{-1}AP$

γ) $A=PDP^{-1} \Rightarrow A^{100}=PD^{100}P^{-1}$ $\qquad$ (1)

όπου $D^{100} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^{100} \end{bmatrix}$

Επομένως, για να υπολογίσουμε τον A^{100} αρκεί να υπολογίσουμε τον P^{-1} και να εκτελέσουμε τον πολλ/σμό των τριών πινάκων στο δεξιό μέλος της (1).