ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ -ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

<u>Θέματα εξέτασης στο μάθημα «Γραμμική Άλγεβρα Ι» (ΕΜ111)</u>

Ηράκλειο, 17 Φεβρουαρίου 2007

<u>Θέμα 1. (μονάδες 2.5)</u>

Έστω το σύστημα $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+\lambda z=3 \\ x+\lambda y+3z=2 \end{cases}$, με αγνώστους $x,y,z\in\mathbb{R}$.

α) [*μονάδες: 0.9*] Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$ το σύστημα έχει μοναδική λύση και ποια είναι αυτή η λύση;

β) [*μονάδες: 0.8*] Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και ποια μορφή έχουν αυτές οι λύσεις;

γ) [*μονάδες: 0.8*] Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$ το σύστημα δεν έχει λύση;

<u>Θέμα 2. (μονάδες 1.5)</u>

Έστω ο πίνακας: $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 8 & 5 \\ -1 & -3 & 10 & 22 \end{bmatrix}$.

α) [*μονάδες: 0.9*] Διασπάστε τον *A* σε ένα γινόμενο *LU* (όπου *L* είναι κάτω τριγωνικός πίνακας με μονάδες στη διαγώνιο και *U* πίνακας σε κλιμακωτή μορφή) και προσδιορίστε την τάξη του *A*.

β) [*μονάδες: 0.3*] Ποια η διάσταση του χώρου στηλών και ποια η διάσταση του χώρου γραμμών του *A*;

γ) [*μονάδες: 0.3*] Ποια η διάσταση του μηδενοχώρου του *A* και ποια η διάσταση του αριστερού μηδενοχώρου του *A*;

<u>Θέμα 3. (μονάδες 3.5)</u>

Έστω το σύνολο $V=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \ : \ x_1+2x_2=x_3+2x_4\right\}$.

α) [*μονάδες: 0.6*] Δείξτε ότι το *V* είναι πραγματικός διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$.

β) [*μονάδες: 0.9*] Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του *V*.

γ) [*μονάδες: 1.0*] Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του *V*.

δ) [*μονάδες: 1.0*] Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου του $\mathbb{R}^4$ που είναι συμπληρωματικός του *V*.

<u>Θέμα 4. (μονάδες 2.2)</u>

Έστω *V*, *W* διανυσματικοί χώροι επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και οι διατεταγμένες βάσεις $\mathbb{B}=\{b_1,b_2,b_3\}$ του *V* και $\mathbb{B}'=\{b_1',b_2',b_3',b_4'\}$ του *W*. Έστω η γραμμική απεικόνιση $f:V\to W$ με:

$$f(b_1)=b_1'+b_2', \qquad f(b_2)=2b_1'+b_3', \qquad f(b_3)=3b_1'+b_2'+b_3'.$$

α) [*μονάδες: 0.5*] Βρείτε τον πίνακα *A* της απεικόνισης *f* ως προς τις βάσεις $\mathbb{B},\mathbb{B}'$.

β) [*μονάδες: 1.2*] Να βρεθούν βάσεις των $\ker f$ και $\operatorname{Im} f$.

γ) [*μονάδες: 0.25*] Είναι η απεικόνιση “επί”;

δ) [*μονάδες: 0.25*] Είναι η απεικόνιση “1-1”;

<u>Θέμα 5. (μονάδες 1.3)</u>

α) [*μονάδες: 1.0*] Έστω ο πίνακας $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$ με $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Να βρεθούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(\lambda)$ και οι ιδιοτιμές του *A*.

β) [*μονάδες: 0.3*] Υπολογίστε άμεσα την ορίζουσα $\det A$ με χρήση του $X_A(\lambda)$ που βρήκατε.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (ΕΜ 111)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ '07

ΘΕΜΑ 1

Εφαρμόζοντας απαλοιφή Gauss, έχουμε:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda & 3 \\ 1 & \lambda & 3 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \xleftarrow{2,(-)} \\ \xleftarrow{1,(-)} \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (\lambda-1) \\ \xleftarrow{(-)} \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 0 & 4-(\lambda-1)(\lambda+2) & 2-\lambda \end{array}\right]$$

α) Το σύστημα έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν υπάρχει πλήρες σύνολο μη-μηδενικών οδηγών. Άρα, αν και μόνο αν $4-(\lambda-1)(\lambda+2)\neq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4-\lambda^2-2\lambda+\lambda+2\neq 0 \Leftrightarrow -\lambda^2-\lambda+6\neq 0 \Leftrightarrow -(\lambda-2)(\lambda+3)\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\neq 2 \\ \text{και} \\ \lambda\neq -3 \end{cases}$$

Σ' αυτήν την περίπτωση, η ανάδρομη αντικατάσταση είναι:

$$-(\lambda-2)(\lambda+3)z = 2-\lambda \Rightarrow z=\frac{1}{\lambda+3}$$

$$y+(\lambda+2)z=1 \Rightarrow y+\frac{\lambda+2}{\lambda+3}=1 \Rightarrow y=1-\frac{\lambda+2}{\lambda+3} \Rightarrow y=\frac{1}{\lambda+3}$$

$$x+y-z=1 \Rightarrow x=1-y+z \Rightarrow x=1$$

Άρα, για $\lambda\neq 2$ και $\lambda\neq -3$, το σύστημα έχει τη μοναδική λύση:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/(\lambda+3) \\ 1/(\lambda+3) \end{bmatrix}$$

β) Αν $\lambda=2$, τότε ο τελευταίος πίνακας γίνεται:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{Άρα:} \begin{cases} y+4z=1 \Leftrightarrow y=1-4z \\ x+y-z=1 \Rightarrow x=5z \end{cases}$$

και το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5z \\ 1-4z \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{με } z \in \mathbb{R}$$

γ) Αν $\lambda=-3$, τότε ο τελευταίος πίνακας της απαλοιφής Gauss γίνεται:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

Το οποίο συνεπάγεται ότι $0z=5$ και άρα το σύστημα είναι αδύνατο, δηλ. δεν έχει λύση

2ος Τρόπος

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ 2x+3y+\lambda z=3 \\ x+\lambda y+3z=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & \lambda \\ 1 & \lambda & 3 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & \lambda \\ \lambda & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = 9-\lambda^2-(6-\lambda)-(2\lambda-3) = -\lambda^2-\lambda+6$$

$$\det A = 0 \Leftrightarrow \lambda^2+\lambda-6=0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \text{ή} \\ \lambda=-3 \end{cases}$$

Επομένως: $\det A = -(\lambda-2)(\lambda+3) \Leftrightarrow \boxed{\det A = (2-\lambda)(\lambda+3)}$

α) Το σύστημα έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \neq 2 \\ \text{και} \\ \lambda \neq -3 \end{cases}$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Cramer έχουμε:

$$\det B_1=\begin{vmatrix}1&1&-1\\3&3&\lambda\\2&\lambda&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&\lambda\\\lambda&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&\lambda\\2&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&3\\2&\lambda\end{vmatrix}=9-\lambda^2-(9-2\lambda)-$$

$$-(3\lambda-6)=-\lambda^2-\lambda+6=\det A$$

$$\det B_2=\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&3&\lambda\\1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&\lambda\\2&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&\lambda\\1&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=2-\lambda$$

$$\det B_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&3\\1&\lambda&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&3\\\lambda&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&3\\1&\lambda\end{vmatrix}=2-\lambda$$

Άρα: $x=\dfrac{\det B_1}{\det A}=\dfrac{\det A}{\det A}=1$, $y=\dfrac{\det B_2}{\det A}=\dfrac{2-\lambda}{(2-\lambda)(\lambda+3)}=\dfrac{1}{\lambda+3}$

$$z=\frac{\det B_3}{\det A}=\frac{2-\lambda}{(2-\lambda)(\lambda+3)}=\frac{1}{\lambda+3}$$

Δηλ. για $\lambda\neq 2$ και $\lambda\neq -3$, το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1/(\lambda+3)\\1/(\lambda+3)\end{bmatrix}$

β) Για $\lambda=2$ έχουμε $\det A=0$ και $\det B_1=\det B_2=\det B_3=0$, και άρα, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Εφαρμόζοντας απαλοιφή Gauss, έχουμε:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\2&3&2&3\\1&2&3&2\end{array}\right]\begin{array}{l}2\\(-)\\(-)\;1\end{array}\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&1&4&1\\0&1&4&1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\1\\(-)\end{array}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&1&4&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

Άρα: $\begin{cases}y+4z=1\iff y=1-4z\\x+y-z=1\Rightarrow x+1-4z-z=1\iff x=5z\end{cases}$

Επομένως $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5z\\1-4z\\z\end{bmatrix}\iff\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}5\\-4\\1\end{bmatrix}$, με $z\in\mathbb{R}$

γ) Για $\lambda=-3$ έχουμε: $\det A=0=\det B_1$, αλλά $\det B_2\neq 0\neq\det B_3$ και το σύστημα δεν έχει λύση.

ΘΕΜΑ 2

α) $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 8 & 5 \\ -1 & -3 & 10 & 22 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 12 & 21 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Από τους πολλαπλασιαστές που χρησιμοποιήθηκαν στην απαλοιφή, προκύπτει:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

[Τάξη του A] $= r(A) =$ [πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του U] $= 2$

β) $\dim R(A) = \dim R(A^T) = r(A) = 2$

γ) $\dim N(A) = n - r(A) = 4 - 2 = 2$

$\dim N(A^T) = m - r(A) = 3 - 2 = 1$

ΘΕΜΑ 3

α) Αρκεί να δειχθεί ότι το V είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό με πραγματικό αριθμό.

Έστω $v_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $v_2 = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ με $v_1, v_2 \in V$

Τότε: $v_1 + v_2 = (x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3,\ x_4+y_4)$

με $\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= x_3 + 2x_4 \\ y_1 + 2y_2 &= y_3 + 2y_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x_1+y_1) + 2(x_2+y_2) = (x_3+y_3) + 2(x_4+y_4)$

Άρα: $v_1 + v_2 \in V \quad , \quad \forall\ v_1, v_2 \in V$ (*)

Επίσης, έστω $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε $\lambda v_1 = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$

και $x_1 + 2x_2 = x_3 + 2x_4 \Rightarrow (\lambda x_1) + 2(\lambda x_2) = (\lambda x_3) + 2(\lambda x_4)$

Άρα: $\lambda v_1 \in V \quad , \forall\ v_1 \in V$ και $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ (**)

$[(*), (**)] \Rightarrow$ το V είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$

β) $\forall\ v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$, έχουμε:

$$v = (-2x_2 + x_3 + 2x_4\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4) =$$

$$= x_2(-2,1,0,0) + x_3(1,0,1,0) + x_4(2,0,0,1)$$

Δηλαδή, $V = \langle (-2,1,0,0), (1,0,1,0), (2,0,0,1) \rangle$

Επίσης: $x_2(-2,1,0,0) + x_3(1,0,1,0) + x_4(2,0,0,1) = (0,0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Άρα τα διανύσματα $(-2,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(2,0,0,1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επειδή παράγουν τον V αποτελούν βάση του. Επομένως, $\dim V = 3$

γ) Έστω $b_1 = (-2,1,0,0)$, $b_2 = (1,0,1,0)$, $b_3 = (2,0,0,1)$

Επειδή $b_1 \cdot b_2 = -2 \neq 0$, η βάση $\mathbb{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ δεν είναι ορθοκανονική. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt. Έχουμε:

$$w_1 = b_1 = (-2, 1, 0, 0)$$

$$w_2 = b_2 - pr_{w_1}(b_2) = b_2 - \frac{(b_2 \cdot b_1)}{\|b_1\|^2} b_1 = b_2 - \frac{(-2)}{4+1} b_1 = b_2 + \frac{2}{5} b_1 =$$

$$= (1, 0, 1, 0) + \left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0, 0\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1, 0\right)$$

$$w_3 = b_3 - pr_{w_1}(b_3) - pr_{w_2}(b_3) = b_3 - \frac{b_3 \cdot w_1}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{b_3 \cdot w_2}{\|w_2\|^2} w_2 =$$

$$= b_3 - \frac{(-4)}{5} w_1 - \frac{(2/5)}{\frac{1}{25} + \frac{4}{25} + 1} w_2 = b_3 + \frac{4}{5} w_1 - \frac{1}{3} w_2 =$$

$$= (2, 0, 0, 1) + \left(-\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, 0, 0\right) - \left(\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{3}, 0\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$$

με $\{w_1, w_2, w_3\}$ ορθογώνια βάση του V.

$$\|w_1\| = \sqrt{5} \quad , \quad \|w_2\| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25} + 1} = \sqrt{6/5}$$

$$\|w_3\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + 1} = \sqrt{5/3}$$

Άρα, ορθοκανονική βάση του V:

$$\mathbb{E} = \left\{ \frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \frac{w_3}{\|w_3\|} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{30} \\ \sqrt{5/6} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{15} \\ 2/\sqrt{15} \\ -1/\sqrt{15} \\ \sqrt{3/5} \end{bmatrix} \right\}$$

δ) Έστω $B=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ δηλ. $V=R(B^T)$

Ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που είναι συμπληρωματικός του V είναι ο μηδενόχωρος $N(B)$. Άρα:

$$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{matrix}-1/2 & (-1)\end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}-2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix} 2 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix}-2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix} = U$$

Άρα: $BX=0 \Leftrightarrow UX=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\X_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -2X_3+X_4=0 \Rightarrow X_3 = X_4/2 \\ \frac{X_2}{2}+X_3=0 \Rightarrow X_2=-2X_3 \Rightarrow X_2=-X_4 \\ -2X_1+X_2=0 \Rightarrow X_1=\frac{X_2}{2} \Rightarrow X_1=-\frac{X_4}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\X_4\end{bmatrix} = X_4\begin{bmatrix}-1/2\\-1\\1/2\\1\end{bmatrix}, \quad X_4\in\mathbb{R}$$

Άρα $\{$βάση του $N(B)\} = \left\{\left(-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2},1\right)\right\}$

ΘΕΜΑ 4

α) ο A έχει στήλες τις συντεταγμένες των $f(b_1), f(b_2), f(b_3)$ ως προς $\mathbb{B}'$. Άρα:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

β) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \leftarrow (-) \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-1/2) \\ \leftarrow (-) \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$

$\{$ μια βάση του $Im f$ ως προς την $\mathbb{B}'\} = \{$μια βάση του $R(A)\} =$

$= \{$στήλες του A που αντιστοιχούν σε στήλες του U με οδηγούς$\} =$

$= \{1η, 2η$ στήλη του $A\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

δηλ. $\{$βάση του $Im f\} = \{w_1, w_2\}$ με $\begin{cases} w_1 = b_1' + b_2' \\ w_2 = 2b_1' + b_3' \end{cases}$

Επίσης:

$$AX = 0 \Leftrightarrow UX = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{cases} -2x_2 - 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3 \end{cases} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

$\{$μια βάση του $Ker f$ ως προς την $\mathbb{B}\} = \{$μια βάση του $N(A)\} =$

$= \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \{w_3\}$ με $w_3 = -b_1 - b_2 + b_3$

γ) $r(A) = 2 < m = 4$ άρα η f δεν είναι "επί"

δ) $r(A) = 2 < n = 3$ » η f δεν » "1-1"

ΘΕΜΑ 5

α) $$X_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -3 \\ -3 & 5-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5-\lambda & 2 \end{vmatrix} + (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 2 + 3(5-\lambda) - (\lambda+1)\left[(2-\lambda)(5-\lambda)+3\right] =$$

$$= 17 - 3\lambda - (\lambda+1)\left(\lambda^2 - 7\lambda + 13\right) =$$

$$= 17 - 3\lambda - \lambda^3 + 7\lambda^2 - 13\lambda - \lambda^2 + 7\lambda - 13 =$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4$$

Δηλ. χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $X_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4$

$$X_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda^2 + 5\lambda + 4\lambda - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2(\lambda-1) - 5\lambda(\lambda-1) + 4(\lambda-1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \lambda = 1 \\ \text{ή} \\ \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \lambda = 1 \\ \text{ή} \\ \lambda = \frac{5 \pm 3}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \lambda = 1 \\ \text{ή} \\ \lambda = 4 \end{matrix}\right\} \text{ ιδιοτιμές του } A$$

β) $$\det A = X_A(0) = 4$$