## ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ -ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

***Θέματα εξέτασης προόδου στο μάθημα «Γραμμική Άλγεβρα» (ΕΜ111)***

Ηράκλειο, 03 Δεκεμβρίου 2006

**Θέμα 1. (μονάδες 2.5)**

α) [*μονάδες: 1.0*]. Γράψτε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων στη μορφή $Ax = b$ και εφαρμόστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss για να το επιλύσετε:

$$\left.\begin{aligned} v - w &= 0 \\ u + 2v + w &= -1 \\ 2u + 6v + w &= -1 \end{aligned}\right\}, \qquad u, v, w \in \mathbb{R}$$

β) [*μονάδες: 0.5*]. Γράψτε αναλυτικά τους στοιχειώδεις πίνακες $E_{ij}$ και τυχόν πίνακες εναλλαγής $P_{ij}$ που χρησιμοποιήσατε.

γ) [*μονάδες: 1.0*]. Χρησιμοποιήστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss-Jordan για να βρείτε τον αντίστροφο, εάν υπάρχει, του πίνακα:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

**Θέμα 2. (μονάδες 2.5)**

α) [*μονάδες: 0.8*]. Δείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{P}_n = \left\{ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_o \setminus a_i \in \mathbb{R},\ \forall\, i = 0, 1, \ldots, n \right\}$ των πολυωνύμων βαθμού $\leq n$ με σταθερούς πραγματικούς συντελεστές είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος.

β) [*μονάδες: 0.4*]. Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του $\mathbb{P}_n$.

γ) [*μονάδες: 0.8*]. Εξετάστε αν τα $v_1 = 4x + 1$, $v_2 = 3x - 1$, $v_3 = 3x^3 + 4x^2 + 2x + 5$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

δ) [*μονάδες: 0.5*]. Αποτελεί το $\{v_1, v_2, v_3\}$ βάση του $\mathbb{P}_3$;

**Θέμα 3. (μονάδες 3.5)**

Έστω ο πίνακας: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 10 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$.

α) [*μονάδες: 0.8*]. Παραγοντοποιήστε τον $A$ σε ένα γινόμενο $LU$ και προσδιορίστε την τάξη του $A$..

β) [*μονάδες: 0.4*]. Βρείτε τη διάσταση και μια βάση του χώρου στηλών του $A$.

γ) [*μονάδες: 0.4*]. Βρείτε τη διάσταση και μια βάση του χώρου γραμμών του $A$.

δ) [*μονάδες: 0.6*]. Βρείτε τη διάσταση και μια βάση του μηδενοχώρου του $A$.

ε) [*μονάδες: 0.6*]. Βρείτε τη διάσταση και μια βάση του αριστερού μηδενοχώρου του $A$.

στ) [*μονάδες: 0.7*]. Βρείτε τη γενική λύση του συστήματος $Ax = b$, για $b = (3, 4, 7, 7)$, ως άθροισμα μιας ειδικής λύσης του και της γενικής λύσης του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος.

**Θέμα 4. (μονάδες 1.5)**

Έστω $V$ και $W$ υπόχωροι διαστάσεως 3 του $\mathbb{R}^5$. Δείξτε ότι οι $V$ και $W$ έχουν κοινό μη-μηδενικό διάνυσμα.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ -ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**

***<u>Θέματα εξέτασης προόδου στο μάθημα «Γραμμική Άλγεβρα» (ΕΜ111)</u>***

Ηράκλειο, 03 Δεκεμβρίου 2006

**<u>Θέμα 1. (μονάδες 3.0)</u>**

α) [*μονάδες: 1.0*]. Γράψτε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων στη μορφή $Ax = b$ και εφαρμόστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss για να το επιλύσετε:

$$\left.\begin{aligned} -6v + 4w &= 0 \\ u + v + 2w &= 1 \\ 2u + 7v - 2w &= 1 \end{aligned}\right\}, \qquad u, v, w \in \mathbb{R}$$

β) [*μονάδες: 0.5*]. Γράψτε αναλυτικά τους στοιχειώδεις πίνακες $E_{ij}$ και τυχόν πίνακες εναλλαγής $P_{ij}$ που χρησιμοποιήσατε.

γ) [*μονάδες: 1.0*]. Χρησιμοποιήστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss-Jordan για να βρείτε τον αντίστροφο, εάν υπάρχει, του πίνακα:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

δ) [*μονάδες: 0.5*]. Με τη βοήθεια των ενδιάμεσων σταδίων που εκτελέσατε κατά την απαλοιφή στο ερώτημα (γ), βρείτε την παραγοντοποίηση *LU* του πίνακα *B*, καθώς και τον $L^{-1}$.

**<u>Θέμα 2. (μονάδες 1.5)</u>**

Αν *A* είναι ένας 5 επί 4 πίνακας με γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες, βρείτε επακριβώς καθένα από τα παρακάτω:

α) [*μονάδες: 0.3*]. Το μηδενόχωρο του *A* και τη διάσταση του.

β) [*μονάδες: 0.2*]. Τη διάσταση του αριστερού μηδενόχωρου του *A*.

γ) [*μονάδες: 0.7*]. Μια ειδική λύση του συστήματος $Ax = b$, όπου $b = 3^{\eta}$ στήλη του *A*.

δ) [*μονάδες: 0.3*]. Τη γενική λύση του συστήματος $Ax = b$, όπου $b = 3^{\eta}$ στήλη του *A*.

**<u>Θέμα 3. (μονάδες 2.0)</u>**

Έστω ότι η γενική λύση του συστήματος $Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ είναι η $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, με $v, w \in \mathbb{R}$.

α) [*μονάδες: 0.5*]. Ποια είναι η διάσταση του χώρου γραμμών του *A*;

β) [*μονάδες: 1.0*]. Ποιος είναι ο πίνακας *A*;

γ) [*μονάδες: 0.5*]. Ποια μορφή έχουν όλα τα διανύσματα *b* για τα οποία το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση.

**<u>Θέμα 4. (μονάδες 2.5)</u>**

Έστω οι πραγματικοί διανυσματικοί υπόχωροι $V = \{(x, y, z) \setminus x = y,\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$ και $W = \{(x, y, z) \setminus x + y + z = 0,\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$ του $\mathbb{R}^3$.

α) [*μονάδες: 0.3*]. Τι παριστάνουν γεωμετρικά τα *V* και *W*;

β) [*μονάδες: 0.8*]. Βρείτε βάσεις των *V* και *W*.

γ) [*μονάδες: 0.6*]. Βρείτε τον υπόχωρο $V \cap W$ και τη διάσταση του αθροίσματος $V + W$.

δ) [*μονάδες: 0.8*]. Βρείτε τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ που είναι συμπληρωματικός του $V \cap W$.

**<u>Θέμα 5. (μονάδες 1.0)</u>**

Βρείτε παραδείγματα πινάκων $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με $a_{12} = 1/2$, για τους οποίους:

α) [*μονάδες: 0.5*]. $A^2 = I$    β) [*μονάδες: 0.5*]. $A^{-1} = A^T$

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

# ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

1) Χρησιμοποιείτε τις αγκύλες [ ] για τη γραφή του πίνακα. ΟΧΙ κατακόρυφες γραμμές | | όπως είδα σε 1-2 γραπτά. Τις κατακόρυφες γραμμές τις χρησιμοποιούμε στις ορίζουσες.

2) Ένας πίνακας εναλλαγής $P_{ij}$ προκύπτει από τον ταυτοτικό (μοναδιαίο) πίνακα $I$ με εναλλαγή της $i$ με την $j$ γραμμή.

3) Όταν κάνετε απαλοιφή Gauss πολλαπλασιάζοντας τη γραμμή $j$ με $\lambda$ και την <u>αφαιρείτε από</u> την $i$, τότε ο στοιχειώδης πίνακας $E_{ij}$ έχει το $(-\lambda)$ στη θέση $i,j$ (Δείτε λύσεις Θέματος 1(β))

4) Όταν παραγοντοποιείτε ένα $m\times n$ πίνακα $A$ σε γινόμενο $LU$ ο $L$ είναι <u>$m\times m$</u> κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο και $U$ ένας <u>$m\times n$</u> κλιμακωτός πίνακας που υπολογίζεται εφαρμόζοντας απαλοιφή Gauss στις γραμμές του $A$. Αν αυτή η απαλοιφή εκτελείται πολλαπλασιάζοντας μια γραμμή $j$ με $\lambda_{ij}$ και <u>αφαιρώντας</u> το αποτέλεσμα από μια παρακάτω γραμμή $i$, τότε ο $L$ θα έχει τους πολλαπλασιαστές $\lambda_{ij}$ στις αντίστοιχες θέσεις $i,j$. Δηλαδή, ο $L$ μπορεί να γραφεί άμεσα μετά το τέλος της απαλοιφής (δείτε λύση 1(δ) του ΤΕΥ και 3(α) του ΤΕΜ). Εναλλακτικά, μπορείτε να υπολογίσετε τον $L$ από τον ταυτοτικό $I$ εφαρμόζοντας τα ίδια στάδια απαλοιφής, αλλά <u>ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ</u> (από το τελευταίο προς το πρώτο στάδιο) και <u>ΠΡΟΣΘΕΤΟΝΤΑΣ</u> αντί να αφαιρούμε γραμμές.

5) Για τον υπολογισμό του αντιστρόφου $A^{-1}$ ενός τετραγωνικού πίνακα $A$ με τη μέθοδο Gauss-Jordan εφαρμόζουμε ακριβώς τα ίδια στάδια απαλοιφής στον $A$ και τον $I$. Δηλ. Χρησιμοποιούμε τον επαυξημένο πίνακα $[A \,\vdots\, I]$ ως ενιαίο.

Έτσι, για παράδειγμα, αν στη θέση του 1ου οδηγού το στοιχείο είναι 0 (όπως συμβαίνει στο Θέμα 1(γ) του ΤΕΜ) εναλλάσσουμε <u>όλη</u> την 1η γραμμή του επαυξημένου πίνακα με κάποια γραμμή παρακάτω έτσι ώστε ο 1ος οδηγός να γίνει μη-μηδενικός.

6) Για να αποδείξετε ότι ένα σύνολο είναι διανυσματικός χώρος πρέπει να δείξετε ότι ισχύουν όλες οι ιδιότητες του ορισμού (δείτε π.χ. Θέμα 2(α) του ΤΕΜ). Από την άλλη, για να αποδείξετε ότι ένα σύνολο είναι διανυσματικός <u>υπόχωρος</u> ενός διανυσματικού χώρου, αρκεί να είναι το σύνολο αυτό κλειστό ως προς την πρόσθεση και κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό με αριθμό από το σώμα $\mathbb{F}$ (το $\mathbb{R}$ για τους πραγματικούς διανυσματικούς χώρους).

7) Προσοχή στις έννοιες γραμμικώς ανεξάρτητα και γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα.

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) = (0, 0, \ldots, 0) \\ \text{ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΛΥΣΗ} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι
ΓΡΑΜΜΙΚΩΣ ΑΝΕΞΑΡΤ.

# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (ΕΜ 111)

## ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ (ΔΕΚ '06)

## ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

### ΘΕΜΑ 1

α)

$$\left.\begin{aligned} v - w &= 0 \\ u + 2v + w &= -1 \\ 2u + 6v + w &= -1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{b}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{εναλλαγή}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{2,\ (-)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{2,\ (-)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Ανάδρομη αντικατάσταση:

$w = 1$

$v - w = 0 \Rightarrow v = w \Rightarrow v = 1$

$u + 2v + w = -1 \Rightarrow u = -1 - 3 \Rightarrow u = -4$

Άρα:
$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

β)

$$E_{31}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix},\quad E_{32}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix},\quad P_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

γ)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&1&-1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\2&6&1&0&0&1\end{array}\right]\ \text{εναλλαγή}\ \longrightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{array}{l}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&0&1&0\\0&1&-1&1&0&0\\2&6&1&0&0&1\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}2\\ \\(-)\end{array}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&0&1&0\\0&1&-1&1&0&0\\0&2&-1&0&-2&1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\2\\(-)\end{array}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&0&1&0\\0&1&-1&1&0&0\\0&0&1&-2&-2&1\end{array}\right]\begin{array}{ll}&(-)\\(-)&\\(-1)&1\end{array}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&2&3&-1\\0&1&0&-1&-2&1\\0&0&1&-2&-2&1\end{array}\right]\begin{array}{l}(-)\\2\\ \\\end{array}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&4&7&-3\\0&1&0&-1&-2&1\\0&0&1&-2&-2&1\end{array}\right]$$

Άρα $B^{-1}=\begin{bmatrix}4&7&-3\\-1&-2&1\\-2&-2&1\end{bmatrix}$

# ΘΕΜΑ 2

α) Εστω $V_1, V_2 \in \mathbb{P}_n$ με $V_1 = \alpha_n X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \dots + \alpha_1 X + \alpha_0$

$V_2 = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \dots + b_1 X + b_0$

Πρόσθεση: $V_1 + V_2 = (\alpha_n + b_n) X^n + (\alpha_{n-1} + b_{n-1}) X^{n-1} + \dots + (\alpha_1 + b_1) X + (\alpha_0 + b_0)$

<u>Ιδιότητες πρόσθεσης:</u>

1) $V_1 + V_2 = (\alpha_n + b_n) X^n + \dots + (\alpha_0 + b_0) = (b_n + \alpha_n) X^n + \dots + (b_0 + \alpha_0)$
$= V_2 + V_1 \quad , \quad \forall \; V_1, V_2 \in \mathbb{P}_n$

2) $V_1 + (V_2 + V_3) = \alpha_n X^n + \dots + \alpha_0 + [(b_n + \gamma_n) X^n + \dots + (b_0 + \gamma_0)] =$
$= [(\alpha_n + b_n) X^n + \dots + (\alpha_0 + b_0)] + \gamma_n X^n + \dots + \gamma_0 =$
$= (V_1 + V_2) + V_3$

3) $\exists \; \mathbf{0} \in \mathbb{P}_n$ τέτοιο ώστε $V_1 + \mathbf{0} = V_1 \quad \forall \; V_1 \in \mathbb{P}_n$
όπου $\mathbf{0} = 0X^n + 0X^{n-1} + \dots + 0X + 0 = 0$

4) $\forall \, V_1 \in \mathbb{P}_n$ με $V_1 = \alpha_n X^n + \dots + \alpha_0$, $\exists \, (-V_1) = (-\alpha_n) X^n + \dots + (-\alpha_0) \in \mathbb{P}_n$
τέτοιο ώστε $V_1 + (-V_1) = 0$

Επίσης, ορίζεται ο πολλ/σμός με πραγματικό αριθμό:

$\lambda V_1 = \lambda (\alpha_n X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \dots + \alpha_1 X + \alpha_0) =$
$= (\lambda \alpha_n) X^n + (\lambda \alpha_{n-1}) X^{n-1} + \dots + (\lambda \alpha_1) X + (\lambda \alpha_0) \in \mathbb{P}_n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

<u>Ιδιότητες του πολλ/σμού με πραγματικό αριθμό:</u>

1) $(\lambda + \mu) V_1 = (\lambda + \mu)(\alpha_n X^n + \dots + \alpha_0) = (\lambda \alpha_n) X^n + \dots + (\lambda \alpha_0) + (\mu \alpha_n) X^n + \dots + (\mu \alpha_0) = \lambda V_1 + \mu V_1 \quad \forall \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\forall \; V_1 \in \mathbb{P}_n$

2) $\lambda (V_1 + V_2) = \lambda [(\alpha_n + b_n) X^n + \dots + (\alpha_0 + b_0)] = (\lambda \alpha_n) X^n + \dots + (\lambda \alpha_0) + (\lambda b_n) X^n + \dots + (\lambda b_0) = \lambda V_1 + \lambda V_2 \; , \; \forall \; \lambda \in \mathbb{R}, \; \forall \; V_1, V_2 \in \mathbb{P}_n$

3) $(\lambda\mu)v_1 = (\lambda\mu)(\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_0) = \lambda[(\mu\alpha_n)x^n + \ldots + (\mu\alpha_0)] =$
$= \lambda(\mu v_1)$ , $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , $\forall\ v_1 \in \mathbb{P}_n$

4) $1v_1 = 1(\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_0) = \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_0 = v_1$ , $\forall\ v_1 \in \mathbb{P}_n$

Από τις παραπάνω ιδιότητες της εσωτερικής πράξης πρόσθεσης και της εξωτερικής πράξης πολλ/σμού με πραγματικό αριθμό, συμπεραίνεται ότι το $\mathbb{P}_n$ είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος.

β) $\forall\ v_1 \in \mathbb{P}_n$ έχουμε: $v_1 = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$
δηλ. γραμμικός συνδυασμός των μονωνύμων: $x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1 \in \mathbb{P}_n$
Άρα, τα $x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1$ παράγουν τον $\mathbb{P}_n$
Επιπλέον, έστω $\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_1, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:
$\lambda_n x^n + \lambda_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \lambda_1 x + \lambda_0 = 0$ , $\forall\ x$
Η σχέση αυτή ισχύει αν και μόνο αν $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$,
και άρα τα $x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1$ είναι γρ. ανεξάρτητα
Επομένως, τα $x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1$ παράγουν τον $\mathbb{P}_n$ και είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Ως εκ τούτου, τα μονώνυμα $x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1$ αποτελούν μια βάση του $\mathbb{P}_n$.
Επίσης $\dim \mathbb{P}_n =$ πλήθος "διανυσμάτων" βάσης $\Rightarrow \dim \mathbb{P}_n = n+1$

γ) $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1(4x+1) + \lambda_2(3x-1) +$
$+ \lambda_3(3x^3 + 4x^2 + 2x + 5) = 0 \Rightarrow (3\lambda_3)x^3 + (4\lambda_3)x^2 +$
$+ (4\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3)x + (\lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3)1 = 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 3\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array}\right.$$

Άρα, τα $v_1, v_2, v_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

δ) Όχι, γιατί $\dim \mathbb{P}_3 = n+1 = 4$, οπότε κάθε βάση του $\mathbb{P}_3$ έχει 4 γραμμικώς ανεξάρτητα "διανύσματα".

## $\boxed{\text{ΘΕΜΑ 3}}$

α)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 10 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

, ενώ από τους πολλαπλασιαστές που χρησιμοποιήθηκαν στην απαλοιφή, προκύπτει:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[Τάξη του $A$] $= r(A) =$ [πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U$] $= 2$

β) $\dim R(A) = r(A) = 2$

{μια βάση του $R(A)$} = {στήλες του $A$ που αντιστοιχούν σε στήλες του $U$ με οδηγούς} = {1η και 3η στήλη του $A$} =

$$= \{(1,2,3,3),\ (3,7,10,10)\}$$

γ) $\dim R(A^T) = r(A) = 2$

$\{$μια βάση του $R(A^T)\} = \{$μη-μηδενικές γραμμές του $U\} =$

$= \{(1,2,3)\ ,\ (0,0,1)\}$

δ) $\dim N(A) = n - r(A) = 3 - 2 = 1$

$$A\mathrm{x} = \mathbf{0} \iff U\mathrm{x} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ u + 2v + 3w = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ u = -2v \end{array} \right.$$

Άρα: $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2v \\ v \\ 0 \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , με $v \in \mathbb{R}$

Επομένως, $\{$μια βάση του $N(A)\} = \{(-2,1,0)\}$

ε) Εφαρμόζουμε στον $I_4$ τη διαδικασία απαλοιφής του ερωτήματος (α) για να βρούμε τον $L^{-1}P$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L^{-1}P$$

$$\dim N(A^T) = m - r(A) = 4 - 2 = 2$$

$$\{\text{μια βάση του } N(A^T)\} = \{2 \text{ τελευταίες γραμμές του } L^{-1}P\} =$$

$$= \{(-1,-1,1,0),\ (-1,-1,0,1)\}$$

6τ) Εφαρμόζουμε τη διαδικασία απαλοιφής του ερωτήματος (α) στο διάνυσμα b. Δηλαδή:

$$\begin{bmatrix}3\\4\\7\\7\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}3\\-2\\-2\\-2\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}3\\-2\\0\\0\end{bmatrix}$$

Άρα: $Ax=b \Leftrightarrow Ux = \begin{bmatrix}3\\-2\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-2\\0\\0\end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w=-2 \\ u+2v+3w=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w=-2 \\ u=9-2v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9-2v\\v\\-2\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}}_{\substack{\text{γενική}\\\text{λύση του}\\Ax=b}} = \underbrace{\begin{bmatrix}9\\0\\-2\end{bmatrix}}_{\substack{\text{ειδική}\\\text{λύση του}\\Ax=b}} + \underbrace{v\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}}_{\substack{\text{γενική λύση}\\\text{του } Ax=0}}$$

# ΘΕΜΑ 4

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V\cap W) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim(V+W) = 3 + 3 - \dim(V\cap W) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim(V\cap W) = 6 - \dim(V+W) \quad (1)$$

Όμως $V+W$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^5$. Άρα: $\dim(V+W) \leq 5$

και η (1) συνεπάγεται:

$$\dim(V\cap W) \geq 6-5 \Rightarrow \dim(V\cap W) \geq 1$$

Άρα: $V\cap W \neq \{(0,0,0,0,0)\}$, οπότε οι $V$ και $W$ έχουν κοινό μη-μηδενικό διάνυσμα.

# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (ΕΜ 111)

## ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ (ΔΕΚ '06)

## ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

## ΘΕΜΑ 1

α)
$$\left.\begin{array}{r} -6v+4w=0 \\ u+v+2w=1 \\ 2u+7v-2w=1 \end{array}\right\} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -6 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b} \iff$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right] \text{εναλλαγή} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} 2 \\ \\ (-) \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (-5/6) \\ (-) \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 & -1 \end{array}\right]$$

Ανάδρομη Αντικατάσταση:

$$-\frac{8}{3}w = -1 \iff w = 3/8$$

$$-6v+4w=0 \Rightarrow v = \frac{2}{3}w \Rightarrow v = \frac{1}{4}$$

$$u+v+2w=1 \Rightarrow u = 1-v-2w \Rightarrow u = 1-\frac{1}{4}-\frac{3}{4} \Rightarrow u=0$$

Άρα: $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 3/8 \end{bmatrix}$

β) $E_{31}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$, $E_{32}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5/6&1\end{bmatrix}$, $P_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

γ) $$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\2&1&-1&0&1&0\\1&2&5&0&0&1\end{array}\right]\begin{array}{l}2\ \ \ 1\\(-)\\ \ \ \ \ (-)\end{array}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&1&1&-2&1&0\\0&2&6&-1&0&1\end{array}\right]\begin{array}{l}2\\(-)\end{array}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&1&1&-2&1&0\\0&0&4&3&-2&1\end{array}\right]\begin{array}{l}\ \ \ \ (-)\\(-)\\1/4\ \ (-1/4)\end{array}\longrightarrow$$

$$\underbrace{\begin{matrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&4\end{matrix}}_{U}\qquad\underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\-2&1&0\\3&-2&1\end{matrix}}_{L^{-1}P=L^{-1}}$$

(μιας και $P=I$ λόγω καμμίας εναλλαγής)

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&7/4&-1/2&1/4\\0&1&0&-11/4&3/2&-1/4\\0&0&4&3&-2&1\end{array}\right]\leftarrow\text{διαίρεση με 4}\qquad\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&7/4&-1/2&1/4\\0&1&0&-11/4&3/2&-1/4\\0&0&1&3/4&-1/2&1/4\end{array}\right]$$

Άρα: $$B^{-1}=\begin{bmatrix}7/4&-1/2&1/4\\-11/4&3/2&-1/4\\3/4&-1/2&1/4\end{bmatrix}$$

δ) Από το ερώτημα (γ) έχουμε ότι:

$U=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&4\end{bmatrix}$ και $L^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\3&-2&1\end{bmatrix}$. Επίσης, από τους πολλαπλασιαστές που χρησιμοποιήθηκαν κατά την απαλοιφή έως το στάδιο εμφάνισης του $U$, προκύπτει ότι:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

## $\boxed{\text{ΘΕΜΑ 2}}$

α) {οι 4 γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες του $A$} = {βάση του $R(A)$} $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dim R(A) = 4 \Rightarrow r(A) = 4$

Άρα $\dim N(A) = n - r(A) = 4 - 4 = 0$

οπότε $N(A) = \{(0,0,0,0)\}$

β) $\dim N(A^T) = m - r(A) = 5 - 4 = 1$

γ) $Ax = \begin{bmatrix} \text{3η στήλη} \\ \text{του } A \end{bmatrix} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{4} \alpha_{ij} x_j = \alpha_{i3}$, με $i = 1, 2, \ldots, 5$

άρα: $\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3 + \alpha_{i4}x_4 = \alpha_{i3} \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, 5$

Μια προφανής λύση είναι η $x_3 = 1$ και $x_1 = x_2 = x_4 = 0$.

Δηλαδή:

$$x_{\text{ειδική}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

δ) $x_{\text{γενική}} = x_{\text{ειδική}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{γενική λύση} \\ \text{ομογενούς}}}{x_0} \Rightarrow x_{\text{γενική}} = x_{\text{ειδική}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_{\text{γενική}} = x_{\text{ειδική}}$

Άρα: $x_{\text{γενική}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ μοναδική λύση του $Ax = b$

# ΘΕΜΑ 3

α) $b=\begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix}$ είναι $3\times 1$, το $X$ είναι $3\times 1$ $\Big\}\Rightarrow$ $A$ είναι $3\times 3$ (δηλ. $m=n=3$)

ο πίνακας $B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ (με στήλες τα 3 διανύσματα που εμφανίζονται στη γενική λύση που δίνεται) είναι σε κλιμακωτή μορφή και έχει 3 μη-μηδενικές γραμμές. Άρα $r(B)=3 \Rightarrow \dim N(B)=0$, οπότε τα διανύσματα-στήλες του $B$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Άρα, η γενική λύση $x$ είναι γραμμένη στη μορφή $X_{γενική}=X_{ειδική}+X_0$

όπου $X_0 = v\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+w\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ είναι η γενική λύση του ομογενούς συστήματος $AX=\underline{0}$. Ως εκ τούτου, έχουμε 2 ελεύθερες μεταβλητές (τις $v, w$) και 1 βασική.

Επομένως, $\dim R(A^T)=r(A)=$[Πλήθος βασικών μεταβλητών]$=1$

β) Έστω $A=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{bmatrix}$. Εφόσον $X_{ειδική}=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$, θα ισχύει:

$$\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}2\alpha_{11}\\2\alpha_{21}\\2\alpha_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_{11}=1\\\alpha_{21}=2\\\alpha_{31}=1\end{cases}$$

Επίσης, εφόσον $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ είναι λύση του $AX=0$, θα ισχύει:

$$\begin{bmatrix}1 & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ 2 & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ 1 & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1+\alpha_{12}\\2+\alpha_{22}\\1+\alpha_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_{12}=-1\\ \alpha_{22}=-2\\ \alpha_{32}=-1\end{cases}$$

Το $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ είναι και αυτό λύση του $AX=0$, άρα:

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & \alpha_{13}\\ 2 & -2 & \alpha_{23}\\ 1 & -1 & \alpha_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}\alpha_{13}\\ \alpha_{23}\\ \alpha_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Επομένως,

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

γ) $\dim R(A) = r(A) = 1 \Rightarrow$ {οποιαδήποτε μη-μηδενική στήλη του $A$ είναι βάση του $R(A)$}. Άρα:

$$\{\text{μια βάση του } R(A)\} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \right\}$$

Επιπλέον, $\{AX=b \text{ έχει λύση}\}$ ανν $\{b \in R(A)\} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow b = \lambda \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \quad \text{με } \lambda \in \mathbb{R}$$

# ΘΕΜΑ 4

α) Το $V$ είναι το <u>επίπεδο</u> με εξίσωση: $x-y=0$, δηλαδή το επίπεδο που ορίζεται από τον άξονα $Oz$ και την ευθεία $y=x$ του επιπέδου $Oxy$.
Το $W$ είναι το <u>επίπεδο</u> με εξίσωση: $x+y+z=0$, δηλαδή το επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία $x+y=0$ του επιπέδου $Oxy$ και την ευθεία $x+z=0$ του επιπέδου $Oxz$.

β) $\forall\ (x,y,z) \in V$ έχουμε:

$$(x,y,z) = (x,x,z) = x(1,1,0) + z(0,0,1) \quad \text{με } x,z \in \mathbb{R}$$

δηλ. $V = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$

Επίσης, τα διανύσματα $(1,1,0)$ και $(0,0,1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, μιας και $\nexists\ \lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω. $(1,1,0) = \lambda(0,0,1)$

Άρα: $\{\text{μια βάση του } V\} = \{(1,1,0), (0,0,1)\}$

$\forall\ (x,y,z) \in W$ έχουμε: $(x,y,z) = (x,y,-x-y) =$

$$= x(1,0,-1) + y(0,1,-1) \quad \text{με } x,y \in \mathbb{R}$$

δηλ. $W = \langle (1,0,-1), (0,1,-1) \rangle$

Επίσης, $\nexists\ \lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω. $(1,0,-1) = \lambda(0,1,-1)$ και επομένως τα $(1,0,-1)$, $(0,1,-1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Άρα: $\{\text{μια βάση του } W\} = \{(1,0,-1), (0,1,-1)\}$

γ) $V \cap W = \{(x,y,z) \setminus x=y \text{ και } x+y+z=0,\ x,y,z \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow V \cap W = \{(x,x,-2x) \setminus x \in \mathbb{R}\}$

δηλ. $\forall (x,y,z) \in V \cap W$ ισχύει:

$(x,y,z) = x(1,1,-2)$ με $x \in \mathbb{R}$

Άρα, το $\{(1,1,-2)\}$ είναι μια βάση του $V \cap W$

Επίσης, $\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) =$
$= 2 + 2 - 1 = 3$

δ) Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ με $R(A^T) = V \cap W$

Τότε, ο συμπληρωματικός του $V \cap W$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ είναι ο μηδενόχωρος $N(A)$.

$$AX = 0 \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \iff x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \iff$$

$$\iff x_1 = 2x_3 - x_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 - x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

δηλ. $\{$μια βάση του $N(A)\} = \{(-1,1,0), (2,0,1)\}$

## ΘΕΜΑ 5

α) Έστω $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 1/2 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$. Τότε $A^2 = I \iff$

$$\iff \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 1/2 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 1/2 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \iff$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{11}^2 + \frac{\alpha_{21}}{2} & \frac{\alpha_{11}+\alpha_{22}}{2} \\ \alpha_{21}\alpha_{11} + \alpha_{22}\alpha_{21} & \frac{\alpha_{21}}{2} + \alpha_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha_{11}^2 + \frac{\alpha_{21}}{2} = 1 \\ \alpha_{11} + \alpha_{22} = 0 \\ \alpha_{21}(\alpha_{11}+\alpha_{22}) = 0 \\ \frac{\alpha_{21}}{2} + \alpha_{22}^2 = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{21} = 2(1-\alpha_{11}^2) \\ \alpha_{22} = -\alpha_{11} \end{array} \right.$$

δηλ. $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 1/2 \\ 2(1-\alpha_{11}^2) & -\alpha_{11} \end{bmatrix}$, π. χ. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$

β) Έστω $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 1/2 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$ με $\alpha_{11}\alpha_{22} - \frac{\alpha_{21}}{2} \neq 0$, έτσι ώστε να $\exists A^{-1}$!

$$A^{-1} = A^T \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \frac{\alpha_{21}}{2}} \begin{bmatrix} \alpha_{22} & -1/2 \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ 1/2 & \alpha_{22} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_{11}\left(\alpha_{11}\alpha_{22} - \frac{\alpha_{21}}{2}\right) = \alpha_{22} & (1) \\ \alpha_{21}\left(\alpha_{11}\alpha_{22} - \frac{\alpha_{21}}{2}\right) = -\frac{1}{2} & (2) \\ \frac{1}{2}\left(\alpha_{11}\alpha_{22} - \frac{\alpha_{21}}{2}\right) = -\alpha_{21} & (3) \\ \alpha_{22}\left(\alpha_{11}\alpha_{22} - \frac{\alpha_{21}}{2}\right) = \alpha_{11} & (4) \end{array} \right.$$

$$(3) \iff \alpha_{11}\alpha_{22} - \frac{\alpha_{21}}{2} = -2\alpha_{21} \iff -\frac{3}{2}\alpha_{21} = \alpha_{11}\alpha_{22} \qquad (5)$$

$$\boxed{(5)\to(2)} \Rightarrow \alpha_{21}(-2\alpha_{21}) = -\frac{1}{2} \iff \alpha_{21}^2 = \frac{1}{4} \iff \boxed{\alpha_{21} = \pm\frac{1}{2}} \qquad (6)$$

$$\boxed{(5)\to(1)} \Rightarrow \alpha_{11}(-2\alpha_{21}) = \alpha_{22} \underset{(6)}{\Longrightarrow} \boxed{\alpha_{22} = \mp\alpha_{11}} \qquad (7)$$

$$\boxed{(6),(7)\to(5)} \Rightarrow -\frac{3}{2}\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \alpha_{11}\left(\mp\alpha_{11}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{11}^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{\alpha_{11} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad (8)$$

$$\boxed{(6),(7)\to(4)} \Rightarrow \alpha_{11} = \alpha_{11} \quad \text{αληθής}$$

Άρα: $\begin{cases} \alpha_{11} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{και} \\ \alpha_{21} = \pm\frac{1}{2}, \quad \alpha_{22} = \mp\alpha_{11} \end{cases}$

δηλ.

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad A = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ή} \quad A = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad A = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$