ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Γραμμική Άλγεβρα Ι» (ΕΜ111) – Χειμερινό Εξάμηνο 2006-2007, Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

11^{O} ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Δείξτε ότι η ορίζουσα ενός πίνακα $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ισούται με το γινόμενο των ιδιοτιμών του.

Άσκηση 2: Να αποδειχθούν οι επόμενες προτάσεις:

α) Οι πίνακες A, A^T έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

β) Αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ είναι οι ιδιοτιμές ενός πίνακα $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, τότε $a\lambda_1, a\lambda_2, \ldots, a\lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του aA, όπου a είναι τυχαίος αριθμός. Επίσης, για $a \neq 0$ ισχύει ότι $V_{\lambda_i}(A) = V_{a\lambda_i}(aA)$, $\forall \lambda_i$ με $i = 1, 2, \ldots, n$.

γ) Αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ είναι οι ιδιοτιμές ενός μη-ιδιόμορφου πίνακα $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, τότε $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}$ είναι οι ιδιοτιμές του A^{-1}, και $V_{\lambda_i}(A) = V_{1/\lambda_i}(A^{-1})$, $\forall \lambda_i$ με $i = 1, 2, \ldots, n$.

δ) Οι ιδιοτιμές ενός τριγωνικού πίνακα είναι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του.

Άσκηση 3: Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ είναι ιδιοτιμές του A όλες διαφορετικές μεταξύ τους. Δείξτε ότι το άθροισμα των ιδιοχώρων $V_{\lambda_1}(A) + V_{\lambda_2}(A) + \ldots + V_{\lambda_k}(A)$ είναι ευθύ. Δηλαδή, $V_{\lambda_1}(A) + V_{\lambda_2}(A) + \ldots + V_{\lambda_k}(A) = V_{\lambda_1}(A) \oplus V_{\lambda_2}(A) \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}(A)$.

Άσκηση 4: Έστω δυο όμοιοι πίνακες $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $B = P^{-1}AP$. Δείξτε ότι: α) $\det A = \det B$, β) $B^k = P^{-1}A^kP$ με $k \in \mathbb{N}$, γ) $X_A(\lambda) = X_B(\lambda)$.

Άσκηση 5: Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

α) ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος.

β) ο A έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα (δηλ. υπάρχει βάση του $\mathbb{F}^n$ που να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A).

γ) Αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ είναι όλες οι διαφορετικές ιδιοτιμές του A, τότε $V_{\lambda_1}(A) \oplus V_{\lambda_2}(A) \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}(A) = \mathbb{F}^n$.

Άσκηση 6: Δείξτε ότι αν ένας πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ έχει n διαφορετικές ιδιοτιμές, τότε διαγωνιοποιείται στο $\mathbb{F}$. Αν $\lambda \in \mathbb{F}$ μια ιδιοτιμή του ενός τέτοιου πίνακα A, ποια είναι η $\dim V_\lambda(A)$;

Άσκηση 7: Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

α) Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ιδιοτιμές του A.

β) Βρείτε από μια βάση για κάθε ιδιόχωρο του A.

γ) Δείξτε ότι ο Α είναι διαγωνιοποιήσιμος στο $\mathbb{R}$.

δ) Βρείτε πίνακα που να διαγωνιοποιεί τον A, καθώς και το διαγώνιο πίνακα που θα προκύψει.

Άσκηση 8: Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda - 4$.

α) Βρείτε το n.

β) Εξηγήστε γιατί ο πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος στο $\mathbb{R}$.

γ) Αν $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας τέτοιος ώστε ο $B = P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος, να υπολογιστεί η $\det B$.

Άσκηση 9: Να διαγωνιοποιηθεί ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$ και να υπολογιστεί ο A^{100}.

Άσκηση 10: α) Αν A είναι ένας $n\times n$ πίνακας με τι ισούται το $X_A(0)$;

β) Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα B είναι $X_B(\lambda)=-\lambda^3+15\lambda^2-25\lambda+172$, να βρεθεί η ορίζουσα του.

Άσκηση 11: Δείξτε ότι αν ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος $n\times n$ πίνακας, τότε οι A και A^T είναι όμοιοι πίνακες.

Άσκηση 12: Για τις ακόλουθες περιπτώσεις βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ιδιοτιμές του A. Κατόπιν βρείτε από μια βάση για κάθε ιδιόχωρο του A και εξετάστε αν ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος. Στην περίπτωση που ο A διαγωνιοποιείται, βρείτε πίνακα που να τον διαγωνιοποιεί και το διαγώνιο πίνακα που θα προκύψει.

α) $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, β) $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (ΕΜ 111)
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ 11ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του A, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A μπορεί να γραφεί ως:

$$X_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\dots(\lambda_n-\lambda)$$

Για $\lambda=0$ έχουμε: $X_A(0) = \det(A) = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$

ΑΣΚΗΣΗ 2

α) $\forall$ ιδιοτιμή λ του A έχουμε:

$$\det(A-\lambda I)=0 \Longleftrightarrow \det\left[(A-\lambda I)^T\right]=0 \Longleftrightarrow \det(A^T-\lambda I)=0$$

Επομένως: $\left.\begin{array}{l}\det(A-\lambda I)=0\\ \det(A^T-\lambda I)=0\end{array}\right\}$ ίδιες ρίζες, άρα A, A^T έχουν ίδιες ιδιοτιμές.

β) $\forall$ ιδιοτιμή λ_i με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα X_i του A έχουμε:

$$AX_i = \lambda_i X_i \Longleftrightarrow (\alpha A)X_i = (\alpha\lambda_i)X_i \quad \text{για } \alpha\neq 0$$

Δηλ. το $(\alpha\lambda_i)$ είναι ιδιοτιμή του (αA).

Άρα, $\forall$ ιδιοτιμή λ_i του A, το $\alpha\lambda_i$ είναι ιδιοτιμή του αA και αντίστροφα, κάθε ιδιοτιμή μ_i του (αA) γράφεται ως $\mu_i=\alpha\lambda_i$.

Επίσης, κάθε ιδιοδιάνυσμα X_i του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i είναι επίσης, ιδιοδιάνυσμα του (αA) που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\alpha\lambda_i$ και αντιστρόφως. Δηλ. $X_i \in V_{\lambda_i}(A) \Longleftrightarrow X_i \in V_{\alpha\lambda_i}(\alpha A)$, $\forall\, i=1,2,\dots,n$

Άρα: $V_{\lambda_i}(A) = V_{\alpha\lambda_i}(\alpha A)$, $\forall\ \lambda_i = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

Όταν $\underline{\underline{\alpha=0}}$ έχουμε:

$$AX_i = \lambda X_i \Rightarrow 0AX_i = 0\lambda_i X \Rightarrow \mathbf{0}X_i = 0X_i$$

Δηλ. πάλι, $\forall$ ιδιοτιμή λ_i του A, το $\alpha\lambda_i = 0\lambda_i = 0$ είναι ιδιοτιμή του $\alpha A = 0A = \mathbf{0}$, και αντιστρόφως, κάθε ιδιοτιμή $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 0$ του $\alpha A = \mathbf{0} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ γράφεται ως $\mu_i = 0 = 0\lambda_i = \alpha\lambda_i$

Επίσης, κάθε ιδιοδιάνυσμα X_i που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i του A είναι και ιδιοδιάνυσμα του $\alpha A = \mathbf{0}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\alpha\lambda_i = 0$. Άρα $V_{\lambda_i}(A) \subseteq V_{0\lambda_i}(0A) = \mathbb{F}^n$

Το αντίστροφο όμως <u>δεν ισχύει</u>, δηλ. κάθε ιδιοδιάνυσμα X του $\alpha A = \mathbf{0}$ (άρα κάθε διάνυσμα του $\mathbb{F}^n$) δεν είναι απαραίτητα και ιδιοδιάνυσμα του A, αφού, $(0A)X = (0\lambda)X$ <u>δεν συνεπάγεται</u> $AX = \lambda X$.

γ) $\forall$ ιδιοτιμή λ_i του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα X_i, έχουμε:

$$AX_i = \lambda X_i \iff \underbrace{A^{-1}A}_{I_n} X_i = \lambda_i A^{-1}X_i \iff X_i = \lambda_i A^{-1}X_i \iff A^{-1}X_i = \frac{1}{\lambda_i}X_i$$

Άρα, $\forall$ ιδιοτιμή λ_i του A, η $\frac{1}{\lambda_i}$ είναι ιδιοτιμή του A^{-1}, δηλ. οι $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ είναι οι ιδιοτιμές του $A^{-1} \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Επίσης, κάθε ιδιοδιάνυσμα X_i του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i είναι και ιδιοδιάνυσμα του A^{-1} που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $1/\lambda_i$, και αντιστρόφως. Δηλαδή, $X_i \in V_{\lambda_i}(A) \iff X_i \in V_{1/\lambda_i}(A^{-1})$, $\forall\ i = 1, 2, \dots, n$

Άρα: $V_{\lambda_i}(A) = V_{1/\lambda_i}(A^{-1})$, $\forall\ \lambda_i = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

δ) Αν $A = [\alpha_{ij}] \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι τριγωνικός, τότε και ο $(A - \lambda I)$ είναι τριγωνικός με στοιχεία στην κύρια διαγώνιο του τα $(\alpha_{11} - \lambda), (\alpha_{22} - \lambda), \dots, (\alpha_{nn} - \lambda)$. Επειδή η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του, θα έχουμε:

$$\det(A - \lambda I) = (\alpha_{11} - \lambda)(\alpha_{22} - \lambda)\cdots(\alpha_{nn} - \lambda)$$

Επομένως: $\det(A - \lambda I) = 0 \iff (\alpha_{11} - \lambda)(\alpha_{22} - \lambda)\cdots(\alpha_{nn} - \lambda) = 0$

η οποία έχει τις ρίζες:

$$\left.\begin{cases} \lambda_1 = \alpha_{11} \\ \lambda_2 = \alpha_{22} \\ \vdots \\ \lambda_n = \alpha_{nn} \end{cases}\right\}$$ δηλ. τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του τριγωνικού πίνακα A είναι οι ιδιοτιμές του.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Θα αποδείξουμε την πρόταση επαγωγικά.

<u>Για κ=2:</u> Έστω $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ ιδιοτιμές του A με $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Αν $X \in V_{\lambda_1}(A) \cap V_{\lambda_2}(A)$, τότε:

$$AX = \lambda_1 X \quad \text{και} \quad AX = \lambda_2 X$$

Επομένως: $\lambda_1 X = \lambda_2 X \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) X = 0$

$$\underset{\lambda_1 \neq \lambda_2}{\Longrightarrow} X = 0 \quad \text{δηλ.} \quad X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα: $V_{\lambda_1}(A) \cap V_{\lambda_2}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow V_{\lambda_1}(A) + V_{\lambda_2}(A) = V_{\lambda_1}(A) \oplus V_{\lambda_2}(A)$$

Έστω ότι για οποιεσδήποτε κ ιδιοτιμές του A διαφορετικές μεταξύ τους, το άθροισμα των ιδιοχώρων τους είναι ευθύ.
Έστω κ+1 τυχαίες ιδιοτιμές του A διαφορετικές μεταξύ τους: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\kappa, \lambda_{\kappa+1} \in \mathbb{F}$. Για να δείξουμε ότι

$$V_{\lambda_1}(A) + V_{\lambda_2}(A) + \dots + V_{\lambda_\kappa}(A) + V_{\lambda_{\kappa+1}}(A) = V_{\lambda_1}(A) \oplus V_{\lambda_2}(A) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_\kappa}(A) \oplus V_{\lambda_{\kappa+1}}(A)$$

αρκεί να δείξουμε ότι οποιαδήποτε ιδιοδιανύσματα $X_1, X_2, \dots, X_\kappa, X_{\kappa+1}$ με $X_1 \in V_{\lambda_1}(A)$, $X_2 \in V_{\lambda_2}(A), \dots, X_\kappa \in V_{\lambda_\kappa}(A)$, $X_{\kappa+1} \in V_{\lambda_{\kappa+1}}(A)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Έστω $\mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \dots + \mu_\kappa X_\kappa + \mu_{\kappa+1} X_{\kappa+1} = 0 \qquad (1)$

όπου $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\kappa, \mu_{\kappa+1} \in \mathbb{F}$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (1) με την ιδιοτιμή $\lambda_{\kappa+1}$ προκύπτει:

$$(\lambda_{\kappa+1}\mu_1)X_1 + (\lambda_{\kappa+1}\mu_2)X_2 + \dots + (\lambda_{\kappa+1}\mu_\kappa)X_\kappa + (\lambda_{\kappa+1}\mu_{\kappa+1})X_{\kappa+1} = 0 \qquad (2)$$

Επίσης, πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με A και τα δύο μέλη της (1) προκύπτει:

$$\mu_1 A X_1 + \mu_2 A X_2 + \dots + \mu_k A X_k + \mu_{k+1} A X_{k+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_1 \lambda_1 X_1 + \mu_2 \lambda_2 X_2 + \dots + \mu_k \lambda_k X_k + \mu_{k+1} \lambda_{k+1} X_{k+1} = 0 \qquad (3)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη την (2) από την (3) παίρνουμε:

$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) X_1 + \mu_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1}) X_2 + \dots + \mu_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) X_k = 0$$

Επειδή όμως το άθροισμα k ιδιοχώρων είναι ευθύ, τα $X_1, X_2, \dots, X_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και άρα:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) &= 0 \\ \mu_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1}) &= 0 \\ &\vdots \\ \mu_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) &= 0 \end{aligned}\right\} \xRightarrow[\lambda_{k+1} \neq \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]{} \left\{\begin{aligned} \mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= 0 \\ &\vdots \\ \mu_k &= 0 \end{aligned}\right.$$

και η (1) γίνεται: $\mu_{k+1} X_{k+1} = 0 \xRightarrow[X_{k+1} \neq 0]{} \mu_{k+1} = 0$

Επομένως, $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = \mu_{k+1} = 0$. Δηλαδή, τα $X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε το άθροισμα των ιδιόχωρων $V_{\lambda_1}(A)$, $V_{\lambda_2}(A), \dots, V_{\lambda_k}(A), V_{\lambda_{k+1}}(A)$ είναι ευθύ.

ΑΣΚΗΣΗ 4

α) $$\det B = \det(P^{-1}AP) = (\det P^{-1})(\det A)(\det P) =$$
$$= \underbrace{(\det P^{-1})(\det P)}_{1}(\det A) = \det A$$

β) $$B^k = \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{k\text{-φορές}} =$$

$$= P^{-1}A\underbrace{(PP^{-1})}_{I_n}A\underbrace{(PP^{-1})}_{I_n}A\dots\underbrace{(PP^{-1})}_{I_n}AP =$$

$$= P^{-1}\underbrace{AAA\cdots A}_{\text{κ-φορές}}P = P^{-1}A^{k}P$$

γ) $$X_B(\lambda) = \det(B-\lambda I) = \det(P^{-1}AP-\lambda I) = \det(P^{-1}AP-\lambda P^{-1}P) =$$
$$= \det\left[P^{-1}(A-\lambda I)P\right] = (\det P^{-1})\left[\det(A-\lambda I)\right](\det P) =$$
$$= \underbrace{(\det P^{-1})(\det P)}_{1}\left[\det(A-\lambda I)\right] = \det(A-\lambda I) = X_A(\lambda)$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

$(\alpha) \Rightarrow (\beta)$: Έστω ότι ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος και $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι πίνακας που διαγωνιοποιεί τον A. Επειδή ο P είναι αντιστρέψιμος, θα έχουμε ότι $\det P \neq 0$, οπότε οι στήλες του P θα είναι μη-μηδενικές.

Αν δηλ. $P = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ P_1 & P_2 & \cdots & P_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$ τότε $P_j \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\forall\, j = 1, 2, \dots, n$

Έστω $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$ (με $d_i \in \mathbb{F}$) ο διαγώνιος πίνακας που προκύπτει από τη διαγωνιοποίηση του A από τον P. Τότε:

$$P^{-1}AP = D \Rightarrow \underbrace{PP^{-1}}_{I_n}AP = PD \Rightarrow AP = PD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\begin{bmatrix} | & | & & | \\ P_1 & P_2 & \cdots & P_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} | & | & & | \\ AP_1 & AP_2 & \cdots & AP_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ d_1P_1 & d_2P_2 & \cdots & d_nP_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AP_1 = d_1 P_1 \\ AP_2 = d_2 P_2 \\ \vdots \\ AP_n = d_n P_n \end{cases}$$

Άρα τα $d_1, d_2, \ldots, d_n$ είναι ιδιοτιμές του A και οι στήλες του P, δηλαδή οι $P_1, P_2, \ldots, P_n$ είναι ιδιοδιανύσματα του A.
Επειδή ο P είναι αντιστρέψιμος, τα $P_1, P_2, \ldots, P_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{F}^n$, και αφού έχουν πλήθος $n = \dim \mathbb{F}^n$, θα αποτελούν βάση του $\mathbb{F}^n$. Δηλαδή, ο $\mathbb{F}^n$ έχει βάση που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A. Επίσης, επειδή κάθε ιδιοδιάνυσμα του A ανήκει στον $\mathbb{F}^n$, ο A δεν μπορεί να έχει περισσότερα από n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Άρα, ο A έχει ακριβώς n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα

(β) ⇒ (γ): Έστω $\mathbb{B} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ βάση του $\mathbb{F}^n$ που αποτελείται από n ιδιοδιανύσματα του A. Άρα:

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \in \left(V_{\lambda_1}(A) \oplus V_{\lambda_2}(A) \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}(A)\right)$$

που σημαίνει ότι

$$\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle \subseteq \left(V_{\lambda_1}(A) \oplus V_{\lambda_2}(A) \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}(A)\right)$$

Όμως επειδή το $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ είναι βάση του $\mathbb{F}^n$, έχουμε:

$$\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle = \mathbb{F}^n.$$

Άρα: $\mathbb{F}^n \subseteq \left(V_{\lambda_1}(A) \oplus V_{\lambda_2}(A) \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}(A)\right)$, η οποία επειδή προφανώς $\left(V_{\lambda_1}(A) \oplus V_{\lambda_2}(A) \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}(A)\right) \subseteq \mathbb{F}^n$

δίνει: $V_{\lambda_1}(A) \oplus V_{\lambda_2}(A) \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}(A) = \mathbb{F}^n$

(γ) ⇒ (α): Έστω $V_{\lambda_1}(A) \oplus V_{\lambda_2}(A) \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}(A) = \mathbb{F}^n$, και έστω

μια βάση $\mathbb{B}_1$ του $V_{\lambda_1}(A)$,
μια βάση $\mathbb{B}_2$ του $V_{\lambda_2}(A)$
$\vdots$
μια βάση $\mathbb{B}_k$ του $V_{\lambda_k}(A)$

Τότε το σύνολο $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2 \cup \ldots \cup \mathbb{B}_k$ είναι μια βάση του $\mathbb{F}^n$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του A. Έστω

$\mathbb{B} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ όπου $P_j = \begin{bmatrix} P_{1j} \\ P_{2j} \\ \vdots \\ P_{nj} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A

που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\mu_j \in \mathbb{F}$.

Δηλαδή: $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\} = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$ με $k \leq n$

(κάποια μ_j ενδεχομένως να είναι ίσα μεταξύ τους)

Έστω ο πίνακας $P = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ P_1 & P_2 & \cdots & P_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}$

Τότε: $AP = A \begin{bmatrix} | & | & & | \\ P_1 & P_2 & \cdots & P_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ AP_1 & AP_2 & \cdots & AP_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mu_1 P_1 & \mu_2 P_2 & \cdots & \mu_n P_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} P\begin{pmatrix} \mu_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & P\begin{pmatrix} 0 \\ \mu_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots & P\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_n \end{bmatrix} = PD$$

όπου $D = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_n \end{bmatrix}$ $n \times n$ διαγώνιος πίνακας

Επειδή τα $P_1, P_2, \ldots, P_n$, ως διανύσματα βάσης, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ο P είναι αντιστρέψιμος. Άρα η παραπάνω σχέση $AP = PD$ συνεπάγεται ότι $P^{-1}AP = P^{-1}PD \Rightarrow P^{-1}AP = D$

δηλ. ο A είναι όμοιος με το διαγώνιο πίνακα D, και επομένως ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι διαφορετικές ιδιοτιμές του A. Επειδή $V_{\lambda_i}(A) \neq \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ $\forall\, i=1,2,\dots,n$, θα έχουμε ότι $\dim V_{\lambda_i}(A) \geq 1$ $\forall\, i=1,2,\dots,n$. Επομένως: $\dim\left(V_{\lambda_1}(A) \oplus V_{\lambda_2}(A) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}(A)\right) \geq n$ (1)

Όμως, $V_{\lambda_1}(A) \oplus V_{\lambda_2}(A) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}(A)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{F}^n$ και $\dim \mathbb{F}^n = n$. Άρα: $\dim\left(V_{\lambda_1}(A) \oplus V_{\lambda_2}(A) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}(A)\right) \leq n$ (2)

η οποία, λόγω της (1), δίνει:

$\dim\left(V_{\lambda_1}(A) \oplus V_{\lambda_2}(A) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}(A)\right) = n$, και επομένως (3)

$V_{\lambda_1}(A) \oplus V_{\lambda_2}(A) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}(A) = \mathbb{F}^n$, δηλ. ο A διαγωνιοποιείται στο $\mathbb{F}$.

Επίσης, η (3) συνεπάγεται ότι: $\sum_{i=1}^{n} \dim V_{\lambda_i}(A) = n \xRightarrow[\forall\, i=1,2,\dots,n]{\dim V_{\lambda_i}(A) \geq 1}$

$\Rightarrow \dim V_{\lambda_i}(A) = 1$, $\forall\, i=1,2,\dots,n$

ΑΣΚΗΣΗ 7

α) $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

$$X_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = (3-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+4\begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (3-\lambda)\left[\lambda(\lambda-3)-4\right] - 2\left[2(3-\lambda)-8\right] +$$

$$+4(4+4\lambda) = (3-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-4) + 20(\lambda+1) =$$

$$= (3-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-4) + 20(\lambda+1) = -(\lambda+1)(\lambda^2-7\lambda-8) =$$

$= -(\lambda+1)^2(\lambda-8)$

Άρα χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A: $X_A(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-8)$

$$X_A(\lambda)=0 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 8 \end{matrix} \right\} \text{ ιδιοτιμές του } A$$

β) Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$ έχουμε:

$$A-\lambda_1 I = A+I = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad V_{-1}(A) = N(A+I)$$

$$(A+I)X = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Απαλοιφή: $$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1/2 \quad 1 \\ (-) \\ (-) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα: $4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2}x_2 - x_3$

δηλ. $$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1/2)x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

Επομένως: $$\{\text{μια βάση του } V_{-1}(A)\} = \mathbb{B}_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 8$ έχουμε:

$$A-\lambda_2 I = A-8I = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad V_8(A) = N(A-8I)$$

$$(A-8I)X = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Απαλοιφή: $\begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2/5) & (-4/5) \\ (-) & \\ & (-) \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 0 & -36/5 & 18/5 \\ 0 & 18/5 & -9/5 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-1/2) \\ (-) \end{matrix} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 0 & -36/5 & 18/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα: $\begin{cases} -\frac{36}{5}x_2 + \frac{18}{5}x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}x_3 \\ -5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \Rightarrow 5x_1 = 2x_2 + 4x_3 \Rightarrow 5x_1 = 5x_3 \Rightarrow x_1 = x_3 \end{cases}$

δηλ. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad x_3 \in \mathbb{R}$

Άρα: $\{$μια βάση του $V_8(A)\} = \mathbb{B}_8 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

γ) $\mathbb{B} = \mathbb{B}_{-1} \cup \mathbb{B}_8 = \left\{ \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Το $\mathbb{B}$ έχει 3 διανύσματα, άρα ο A έχει 3 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, και επειδή $n=3$, ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος.

δ) Ο πίνακας $P = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (με στήλες τα διανύσματα του $\mathbb{B}$)

διαγωνιοποιεί τον A και $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ (3x3 διαγώνιος πίνακας με τις

αντίστοιχες, ως προς τις στήλες του P, ιδιοτιμές του A στην κύρια διαγώνιο)

είναι ο διαγώνιος πίνακας που προκύπτει από την εξίσωση ομοιότητας:

$$D = P^{-1}AP$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι 3ου βαθμού ως προς λ. Άρα $n=3$.
Δηλαδή ο A είναι 3×3

β) $X_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow -\lambda^3+5\lambda-4=0 \Leftrightarrow -\lambda^3+\lambda+4\lambda-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\lambda(\lambda^2-1)+4(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow (\lambda-1)\left[-\lambda(\lambda+1)+4\right]=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-4)=0 \Leftrightarrow -(\lambda-1)\left(\lambda+\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\left(\lambda+\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)=0$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1=1 \\ \lambda_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ \lambda_3=\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right\}$ δηλ. ο A έχει $n=3$ διαφορετικές πραγματικές ιδιοτιμές και άρα διαγωνιοποιείται στο $\mathbb{R}$ (βλ. Άσκηση 6)

γ) Οι A, B είναι όμοιοι. Άρα: $\det B=\det A \Rightarrow \det B = X_A(0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \det B = -4$

ΑΣΚΗΣΗ 9

$A-\lambda I = \begin{bmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 6 & -6-\lambda \end{bmatrix}$, $X_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=(5-\lambda)(-6-\lambda)+24=$
$=\lambda^2+\lambda-6$

$X_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow \lambda=\frac{-1\pm5}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda_1=2\\ \lambda_2=-3\end{array}\right\}$ ιδιοτιμές του A

δηλ. ο A έχει $n=2$ διαφορετικές πραγματικές ιδιοτιμές και άρα διαγωνιοποιείται στο $\mathbb{R}$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=2$ έχουμε:

$(A-2I)X=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Άρα: $3x_1 - 4x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{4}{3}x_2$

Δηλ. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 4/3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 \in \mathbb{R}$

Επομένως: $\{$μια βάση του $V_2(A)\} = \mathbb{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 4/3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Για την ιδιοτιμή $\lambda = -3$, έχουμε:

$$(A + 3I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα: $8x_1 - 4x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2$

Δηλ. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 \in \mathbb{R}$

Επομένως: $\{$μια βάση του $V_{-3}(A)\} = \mathbb{B}_{-3} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Ο πίνακας $P = \begin{bmatrix} 4/3 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, με στήλες τα διανύσματα του $\mathbb{B} = \mathbb{B}_2 \cup \mathbb{B}_{-3}$, διαγωνιοποιεί τον A. Ο διαγώνιος που προκύπτει είναι ο $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ δηλ. ο 2x2 διαγώνιος πίνακας με τις αντίστοιχες (ως προς τις στήλες του P) ιδιοτιμές του A στην κύρια διαγώνιο. Άρα:

$$P^{-1}AP = D \Rightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow A^k = PD^kP^{-1} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Άρα: $A^{100} = PD^{100}P^{-1}$

όπου $D^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & (-3)^{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{bmatrix}$ και $P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 4/3 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 6/5 & -3/5 \\ -6/5 & 8/5 \end{bmatrix}$$

Άρα: $A^{100} = \begin{bmatrix} 4/3 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6/5 & -3/5 \\ -6/5 & 8/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2^{103} - 3^{101}}{5} & \frac{4}{5}(3^{100} - 2^{100}) \\ \frac{6}{5}(2^{100} - 3^{100}) & \frac{8 \cdot 3^{100} - 3 \cdot 2^{100}}{5} \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ 10

α) $\mathcal{X}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \Rightarrow \boxed{\mathcal{X}_A(0) = \det(A)}$

β) $\det B = \mathcal{X}_B(0) = 172$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Αν ο $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος, τότε $\exists$ αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε: $P^{-1}AP = D$, όπου D διαγώνιος $n\times n$ πίνακας.

Έχουμε: $P^{-1}AP = D \Rightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow A^T = (PDP^{-1})^T \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^T = (P^{-1})^T D^T P^T \Rightarrow A^T = (P^T)^{-1} D^T P^T \underset{D^T = D}{\Longrightarrow} A^T = (P^T)^{-1} D P^T \Rightarrow$$

$$\underset{D = P^{-1}AP}{\Longrightarrow} A^T = (P^T)^{-1}(P^{-1}AP)P^T \Rightarrow A^T = [(P^T)^{-1}P^{-1}]A(PP^T) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^T = (PP^T)^{-1} A (PP^T) \qquad (1)$$

Θέτοντας $M = PP^T$, η (1) γίνεται: $A^T = M^{-1}AM$ και άρα οι A^T, A είναι όμοιοι πίνακες.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Λύνεται όπως η Άσκηση 7. Στην περίπτωση που το σύνολο $\mathbb{B} = \{$μια βάση του $V_{\lambda_1}(A)\} \cup \{$μια βάση του $V_{\lambda_2}(A)\} \cup \ldots \cup \{$μια βάση του $V_{\lambda_k}(A)\}$ (όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ όλες οι διαφορετικές ιδιοτιμές του A) έχει λιγότερα από n ιδιοδιανύσματα, ο A δεν διαγωνιοποιείται. Αν το $\mathbb{B}$ έχει n ιδιοδιανύσματα ο A διαγωνιοποιείται, οπότε $\exists P$ αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $P^{-1}AP = D$ όπου D διαγώνιος.