ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Γραμμική Άλγεβρα Ι» (ΕΜ111) – Χειμερινό Εξάμηνο 2006-2007, Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

10^{o} ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $\mathbb{B}=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$, $\mathbb{B}'=\{b_1',b_2',\ldots,b_n'\}$ δυο διατεταγμένες βάσεις του V.

α) Δείξτε ότι για κάθε διάνυσμα $v\in V$, οι στήλες των συντεταγμένων

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = x'$$

του v ως προς τις βάσεις $\mathbb{B}$ και $\mathbb{B}'$, αντίστοιχα, συνδέονται με τη σχέση $x'=Ax$, όπου A είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B}\mapsto\mathbb{B}'$.

β) Δείξτε το αντίστροφο, δηλαδή ότι αν A είναι ο πίνακας που μετασχηματίζει τις συντεταγμένες ως προς $\mathbb{B}$ σε συντεταγμένες ως προς $\mathbb{B}'$, τότε ο A είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B}\mapsto\mathbb{B}'$.

Άσκηση 2: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $\mathbb{B}=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$, $\mathbb{B}'=\{b_1',b_2',\ldots,b_n'\}$ δυο διατεταγμένες βάσεις του V. Αν A είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B}\mapsto\mathbb{B}'$, δείξτε ότι ο A^{-1} είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B}'\mapsto\mathbb{B}$.

Άσκηση 3: Έστω $\mathbb{B}=\{b_1,b_2,\ldots,b_k\}$ μια οποιαδήποτε βάση ενός πραγματικού διανυσματικού χώρου V. Αν $\mathbb{B}'=\{q_1,q_2,\ldots,q_k\}$ είναι η ορθογώνια βάση που προκύπτει από την $\mathbb{B}$ με τη μέθοδο Gram-Schmidt, τότε υπολογίστε τον πίνακα αλλαγής βάσης $\mathbb{B}\mapsto\mathbb{B}'$.

Άσκηση 4: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $\mathbb{B}=\{b_1,b_2,b_3\}$ μια διατεταγμένη βάση του V. Θεωρούμε τα $b_1',b_2',b_3'\in V$ με: $b_1'=2b_1+b_2-b_3$, $b_2'=b_1+b_2$, $b_3'=b_3$, και τη γραμμική απεικόνιση $f:V\to V$ με: $f(b_1)=2b_1-b_2$, $f(b_2)=b_1+b_2$, $f(b_3)=b_3$.

α) Δείξτε ότι τα b_1',b_2',b_3' είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και συμπεράνατε ότι το $\mathbb{B}'=\{b_1',b_2',b_3'\}$ είναι μια άλλη διατεταγμένη βάση του V.

β) Βρείτε τον πίνακα αλλαγής βάσης $\mathbb{B}'\mapsto\mathbb{B}$.

γ) Ποιες είναι οι συντεταγμένες των b_1,b_2,b_3 ως προς τη βάση $\mathbb{B}'$.

δ) Βρείτε τον πίνακα της f ως προς τη βάση $\mathbb{B}$ και τον πίνακα της f ως προς τη $\mathbb{B}'$.

Άσκηση 5: Έστω $\mathbb{B}=\{(1,0,-2),(0,1,-1)\}$ και $\mathbb{B}'=\{(2,3,-7),(3,3,-9)\}$ δυο βάσεις του διανυσματικού υπόχωρου $V=\{(x,y,z)\ \backslash\ 2x+y+z=0,\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$ του $\mathbb{R}^3$.

α) Βρείτε τον πίνακα αλλαγής βάσης $\mathbb{B}\mapsto\mathbb{B}'$.

β) Βρείτε τον πίνακα αλλαγής βάσης $\mathbb{B}'\mapsto\mathbb{B}$.

γ) Έστω ένα διάνυσμα $v\in V$ με συντεταγμένες ως προς την $\mathbb{B}$ τις $(3,-1)$. Βρείτε τις συντεταγμένες του v ως προς την $\mathbb{B}'$. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του v ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$;

Άσκηση 6: Δείξτε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας είναι ορθογώνιος αν και μόνο αν οι στήλες του είναι ορθοκανονικές.

Άσκηση 7: Αν ο Q είναι ορθογώνιος, συμβαίνει το ίδιο με τον Q^3;

Άσκηση 8: Δείξτε ότι αν ένας ορθογώνιος πίνακας είναι και άνω τριγωνικός τότε είναι διαγώνιος.

Άσκηση 9: α) Αν u είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, δείξτε ότι ο $Q = I - 2uu^T$ είναι ορθογώνιος.

β) Υπολογίστε τον Q όταν $u^T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 10: Βρείτε μια τρίτη στήλη, έτσι ώστε ο πίνακας $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{14} & ? \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{14} & ? \\ 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{14} & ? \end{bmatrix}$ να είναι ορθογώνιος.

Άσκηση 11: α) Αν Q_1 και Q_2 είναι ορθογώνιοι πίνακες, δείξτε ότι και ο Q_1Q_2 είναι ορθογώνιος.

β) Αν ο $Q_1 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ αντιπροσωπεύει περιστροφή κατά γωνία θ και ο $Q_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ περιστροφή κατά γωνία φ, τι αντιπροσωπεύει ο Q_1Q_2;

γ) Βρείτε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες για το $\cos(\varphi + \theta)$ και το $\sin(\varphi + \theta)$ από τον πολλαπλασιασμό Q_1Q_2.

Άσκηση 12: Ποιος είναι ο πίνακας που δρα με αποτέλεσμα να περιστρέφει κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ κατά 60°, και κατόπιν να το ανακλά ως προς την ευθεία $y = \sqrt{5}x$;

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (ΕΜ 111)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ 10ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

α) Αφού $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος v ως προς τη βάση $\mathbb{B}$, ισχύει ότι:

$$v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots x_n b_n \qquad (1)$$

Επίσης, αν $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B} \mapsto \mathbb{B}'$, ισχύει ότι:

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \alpha_{11} b_1' + \alpha_{21} b_2' + \dots + \alpha_{n1} b_n' \\ b_2 &= \alpha_{12} b_1' + \alpha_{22} b_2' + \dots + \alpha_{n2} b_n' \\ &\vdots \\ b_n &= \alpha_{1n} b_1' + \alpha_{2n} b_2' + \dots + \alpha_{nn} b_n' \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας τις (2) στην (1) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} v = {} & x_1 (\alpha_{11} b_1' + \alpha_{21} b_2' + \dots + \alpha_{n1} b_n') + \\ & + x_2 (\alpha_{12} b_1' + \alpha_{22} b_2' + \dots + \alpha_{n2} b_n') + \dots \\ & \dots + x_n (\alpha_{1n} b_1' + \alpha_{2n} b_2' + \dots + \alpha_{nn} b_n') \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} v = {} & (x_1 \alpha_{11} + x_2 \alpha_{12} + \dots + x_n \alpha_{1n}) b_1' + \\ & + (x_1 \alpha_{21} + x_2 \alpha_{22} + \dots + x_n \alpha_{2n}) b_2' + \dots \\ & \dots + (x_1 \alpha_{n1} + x_2 \alpha_{n2} + \dots + x_n \alpha_{nn}) b_n' \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

δηλ. οι συντεταγμένες του v ως προς τη $\mathbb{B}'$ είναι:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \alpha_{11} + x_2 \alpha_{12} + \dots + x_n \alpha_{1n} \\ x_1 \alpha_{21} + x_2 \alpha_{22} + \dots + x_n \alpha_{2n} \\ \vdots \\ x_1 \alpha_{n1} + x_2 \alpha_{n2} + \dots + x_n \alpha_{nn} \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \iff X' = AX$$

β) Αφού ο πίνακας A μετασχηματίζει τις συντεταγμένες ως προς την $\mathbb{B}$ σε συντεταγμένες ως προς τη $\mathbb{B}'$, τότε, επειδή το b_1 έχει συντεταγμένες $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ως προς την $\mathbb{B}$, το γινόμενο

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{1η στήλη} \\ \text{του } A \end{bmatrix}$$

θα είναι οι συντεταγμένες του b_1 ως προς την $\mathbb{B}'$.

Ομοίως, το b_j με συντεταγμένες $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j\text{-θέση}$ ως προς την $\mathbb{B}$, θα έχει συντεταγμένες ως προς $\mathbb{B}'$ τις

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\text{-στήλη} \\ \text{του } A \end{bmatrix} \quad \forall \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Άρα, οι στήλες του A είναι οι συντεταγμένες των $b_1, b_2, \dots, b_n$ ως προς την $\mathbb{B}'$. Επομένως, ο A είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B} \mapsto \mathbb{B}'$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Αφού ο A είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B} \mapsto \mathbb{B}'$, αν $v \in V$ είναι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα του V με συντεταγμένες $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ως προς την $\mathbb{B}$, και $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$ ως προς την $\mathbb{B}'$, τότε:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \xRightarrow[\text{αφού ο } A \text{ είναι πίνακας αλλαγής βάσης}]{\exists A^{-1}} A^{-1} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = A^{-1} A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = I_n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

Άρα, για κάθε διάνυσμα v του V, ο A^{-1} μετασχηματίζει τις συντεταγμένες ως προς την $\mathbb{B}'$ σε συντεταγμένες ως προς την $\mathbb{B}$. Επομένως (βλ. ερώτημα β, Άσκηση 1) είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B}' \mapsto \mathbb{B}$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Αν $\mathbb{B}' = \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$ είναι η ορθογώνια βάση που προκύπτει από την $\mathbb{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ με τη μέθοδο Gram-Schmidt, τότε:

$$q_1 = b_1 \Leftrightarrow \boxed{b_1 = q_1}$$

$$q_2 = b_2 - pr_{q_1}(b_2) = b_2 - \frac{(b_2 \cdot q_1)}{\|q_1\|^2} q_1 \Rightarrow \boxed{b_2 = \frac{(b_2 \cdot q_1)}{\|q_1\|^2} q_1 + q_2}$$

$$q_3 = b_3 - pr_{q_1}(b_3) - pr_{q_2}(b_3) = b_3 - \frac{(b_3 \cdot q_1)}{\|q_1\|^2} q_1 - \frac{(b_3 \cdot q_2)}{\|q_2\|^2} q_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b_3 = \frac{(b_3 \cdot q_1)}{\|q_1\|^2} q_1 + \frac{(b_3 \cdot q_2)}{\|q_2\|^2} q_2 + q_3}$$

$\vdots$

$$q_\kappa = b_\kappa - pr_{q_1}(b_\kappa) - pr_{q_2}(b_\kappa) - \ldots - pr_{q_{\kappa-1}}(b_\kappa) =$$

$$= b_\kappa - \frac{(b_\kappa \cdot q_1)}{\|q_1\|^2} q_1 - \frac{(b_\kappa \cdot q_2)}{\|q_2\|^2} q_2 - \ldots - \frac{(b_\kappa \cdot q_{\kappa-1})}{\|q_{\kappa-1}\|^2} q_{\kappa-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b_\kappa = \frac{(b_\kappa \cdot q_1)}{\|q_1\|^2} q_1 + \frac{(b_\kappa \cdot q_2)}{\|q_2\|^2} q_2 + \ldots + \frac{(b_\kappa \cdot q_{\kappa-1})}{\|q_{\kappa-1}\|^2} q_{\kappa-1} + q_\kappa}$$

Ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των $b_1, b_2, \ldots, b_\kappa$ ως προς την $\mathbb{B}'$. Άρα, είναι ο πίνακας:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{(b_2 \cdot q_1)}{\|q_1\|^2} & \frac{(b_3 \cdot q_1)}{\|q_1\|^2} & \cdots & \frac{(b_\kappa \cdot q_1)}{\|q_1\|^2} \\ 0 & 1 & \frac{(b_3 \cdot q_2)}{\|q_2\|^2} & \cdots & \frac{(b_\kappa \cdot q_2)}{\|q_2\|^2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{(b_\kappa \cdot q_3)}{\|q_3\|^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

α) Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ με στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων b_1', b_2', b_3' ως προς τη βάση $\mathbb{B}$. Έχουμε:

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-1 = 1 \neq 0, \text{ και άρα } \dim R(A) = n = 3$$

Επομένως, τα b_1', b_2', b_3' είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αφού $\dim V = 3$, το σύνολο $\mathbb{B}' = \{b_1', b_2', b_3'\}$ είναι μια διατεταγμένη βάση του V.

β) Ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B}' \mapsto \mathbb{B}$ έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των b_1', b_2', b_3' ως προς την $\mathbb{B}$. Άρα είναι ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ που θεωρήσαμε στο ερώτημα (α).

γ) Οι συντεταγμένες των b_1, b_2, b_3 ως προς την $\mathbb{B}'$ είναι οι στήλες του πίνακα αλλαγής βάσης $\mathbb{B} \mapsto \mathbb{B}'$, δηλ. οι στήλες του A^{-1}. Έχουμε: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A)$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det(A_{11}) & -\det(A_{12}) & \det(A_{13}) \\ -\det(A_{21}) & \det(A_{22}) & -\det(A_{23}) \\ \det(A_{31}) & -\det(A_{32}) & \det(A_{33}) \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\det A = 1}{\Longrightarrow} A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Επομένως, οι συντεταγμένες των b_1, b_2, b_3 ως προς $\mathbb{B}'$ είναι
$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ αντίστοιχα.

δ) Ο πίνακας της f ως προς $\mathbb{B}$ έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $f(b_1)$, $f(b_2)$, $f(b_3)$ ως προς την $\mathbb{B}$. Άρα είναι ο πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επειδή A είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B}' \longmapsto \mathbb{B}$, ο πίνακας της f ως προς την $\mathbb{B}'$ είναι ο εξής:

$$B' = A^{-1} B A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -7 & -3 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

α) Έστω $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $b_1' = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$, $b_2' = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -9 \end{bmatrix}$

δηλ. $\mathbb{B} = \{b_1, b_2\}$ και $\mathbb{B}' = \{b_1', b_2'\}$

Επειδή $b_1, b_2 \in V$ και $\mathbb{B}'$ είναι μια βάση του V, θα υπάρχουν συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, τέτοιοι ώστε:

$$b_1 = \lambda_1 b_1' + \lambda_2 b_2' \qquad (1)$$

$$b_2 = \lambda_3 b_1' + \lambda_4 b_2' \qquad (2)$$

Ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των b_1, b_2 ως προς την $\mathbb{B}'$. Άρα είναι ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

<u>Υπολογισμός των $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$:</u>

Από την εξίσωση (1) έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -9 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \\ -7 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

απαλοιφή Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ -7 & -9 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} (3/2) \quad (-7/2) \\ (-) \\ (-) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (-1) \\ (-) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \quad \text{Άρα:} \begin{cases} -\frac{3}{2}\lambda_2 = -\frac{3}{2} \iff \boxed{\lambda_2 = 1} \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -1} \end{cases}$$

Από την εξίσωση (2) έχουμε:

$$\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} = \lambda_3\begin{bmatrix}2\\3\\-7\end{bmatrix} + \lambda_4\begin{bmatrix}3\\3\\-9\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 3\\-7 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_3\\\lambda_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \qquad (4)$$

όπου ο πίνακας στο αριστερό μέρος της (4) είναι ίδιος με εκείνον στην (3), και άρα χρειάζονται τα ίδια στάδια απαλοιφής. Εφαρμόζοντας αυτά τα στάδια στο διάνυσμα του δεξιού μέρους της (4) έχουμε:

$$\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \begin{matrix}(3/2) & (-7/2)\\ \leftarrow(-) & \\ \leftarrow & (-)\end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \begin{matrix}(-1)\\ \leftarrow(-)\end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\text{Άρα:}\begin{cases} -\dfrac{3}{2}\lambda_4 = 1 \Leftrightarrow \boxed{\lambda_4 = -\dfrac{2}{3}} \\ 2\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_3 = -\dfrac{3}{2}\lambda_4 \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = 1} \end{cases}$$

Επομένως: $$A = \begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & -2/3\end{bmatrix}$$

β) Αφού ο A είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B} \mapsto \mathbb{B}'$, ο A^{-1} είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B}' \mapsto \mathbb{B}$

Δηλαδή, ο πίνακας:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix}-2/3 & -1\\-1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{(-1/3)}\begin{bmatrix}-2/3 & -1\\-1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 3\end{bmatrix}$$

γ) Έστω $X = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$ οι συντεταγμένες του v ως προς την $\mathbb{B}$. Τότε οι συντεταγμένες του v ως προς την $\mathbb{B}'$ θα είναι:

$$X' = AX = \begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & -2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\11/3\end{bmatrix}$$

δηλ. $v = 3b_1 - b_2 = -4b_1' + \frac{11}{3} b_2'$

Επίσης, $v = 3b_1 - b_2 = 3\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\\-5\end{bmatrix}$ οι συντεταγμένες του v ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$

$$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 6}}$$

Έστω Q ένας $n \times n$ ορθογώνιος πίνακας με στήλες τα διανύσματα $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Δηλαδή: $Q = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$

Αφού ο Q είναι ορθογώνιος, θα ισχύει ότι:

$$Q^T Q = I_n \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{—} \; q_1^T \; \text{—} \\ \text{—} \; q_2^T \; \text{—} \\ \vdots \\ \text{—} \; q_n^T \; \text{—} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_1^T q_1 & q_1^T q_2 & \cdots & q_1^T q_n \\ q_2^T q_1 & q_2^T q_2 & \cdots & q_2^T q_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_n^T q_1 & q_n^T q_2 & \cdots & q_n^T q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Άρα, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$ έχουμε: $q_i^T q_i = 1 \Leftrightarrow q_i \cdot q_i = 1 \Leftrightarrow \|q_i\|^2 = 1$ $\Leftrightarrow \|q_i\| = 1$ δηλ. τα $q_1, q_2, \ldots, q_n$ είναι μοναδιαία. Επίσης, $\forall\, i \neq j$ (με $j = 1, 2, \ldots, n$) έχουμε: $q_i^T q_j = 0 \Leftrightarrow q_i \cdot q_j = 0$, δηλαδή $q_i \perp q_j$. Επομένως, τα $q_1, q_2, \ldots, q_n$ (δηλ. οι στήλες του Q) είναι ορθοκανονικές.

Αντιστρόφως, αν Q είναι ένας $n \times n$ πίνακας με ορθοκανονικές στήλες $q_1, q_2 \dots q_n$, τότε ισχύει η (1). Από τις ισοδυναμίες παραπάνω συνεπάγεται ότι ισχύει και η σχέση $Q^T Q = I_n$. (2)
Επιπλέον, επειδή ο Q έχει ορθοκανονικές στήλες, αυτές θα είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, και άρα ο Q είναι αντιστρέψιμος.
Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (2) με Q^{-1} από δεξιά, έχουμε:

$$\underbrace{Q^T Q}_{I_n} Q^{-1} = Q^{-1} \Rightarrow Q^T = Q^{-1}$$

Άρα $QQ^T = I_n = Q^T Q$, δηλαδή ο Q είναι ορθογώνιος.

ΑΣΚΗΣΗ 7

$$(Q^3)^T Q^3 = (QQQ)^T (QQQ) = (Q^T Q^T Q^T)(QQQ) =$$
$$= Q^T Q^T \underbrace{(Q^T Q)}_{I_n} QQ = Q^T \underbrace{Q^T Q}_{I_n} Q = Q^T Q = I_n$$

Ομοίως δείχνουμε ότι: $Q^3 (Q^3)^T = I_n$
Άρα, αν ο Q είναι ορθογώνιος, τότε και ο Q^3 είναι ορθογώνιος.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Έστω Q ένας άνω τριγωνικός ορθογώνιος $n \times n$ πίνακας. Δηλαδή

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ 0 & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Q^T Q = I_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ q_{12} & q_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{1n} & q_{2n} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ 0 & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} q_{11}^2 & q_{11}q_{12} & \cdots & q_{11}q_{1n} \\ q_{12}q_{11} & q_{12}^2+q_{22}^2 & \cdots & q_{12}q_{1n}+q_{22}q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{1n}q_{11} & q_{1n}q_{12}+q_{2n}q_{22} & \cdots & q_{1n}^2+q_{2n}^2+\dots+q_{nn}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ή συνοπτικά: $Q^TQ = I_n \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} q_{ki}q_{kj} = \delta_{ij}$, η οποία εξαιτίας του ότι ο Q είναι άνω τριγωνικός (δηλ. $q_{ki}=0$ για $k>i$), γίνεται: $\sum_{k=1}^{\min(i,j)} q_{ki}q_{kj} = \delta_{ij}$. Επιπλέον, επειδή ο Q^TQ είναι συμμετρικός, αρκεί να εξετάσουμε τα στοιχεία $(Q^TQ)_{ij}$ με $j \geq i$. Άρα, μας ενδιαφέρουν οι ισότητες $\sum_{k=1}^{i} q_{ki}q_{kj} = \delta_{ij}$. Έτσι, από την 1η γραμμή ($i=1$), έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} & q_{11}^2 = 1 \Rightarrow q_{11} = \pm 1 \\ & q_{11}q_{1j} = 0 \Rightarrow q_{1j} = 0, \ \forall j = 2,3,\dots,n \end{aligned}\right\}$$ δηλ. όλα τα στοιχεία της 1ης γραμμής του Q είναι μηδέν εκτός από το q_{11}

Από τη 2η γραμμή ($i=2$), έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} & q_{12}^2 + q_{22}^2 = 1 \Rightarrow q_{22}^2 = 1 \Rightarrow q_{22} = \pm 1 \\ & q_{12}q_{1j} + q_{22}q_{2j} = 0 \Rightarrow q_{2j} = 0, \ \forall j = 3,4,\dots,n \end{aligned}\right\}$$ δηλ. όλα τα στοιχεία και της 2ης γραμμής του Q είναι μηδέν εκτός από το q_{22}

Επαγωγικά, έστω ότι όλα τα στοιχεία και της $(i-1)$-γραμμής του Q είναι μηδέν εκτός από το διαγώνιο στοιχείο $q_{(i-1)(i-1)}$. Τότε για την i-γραμμή θα έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{i} q_{ki}q_{ki} = 1 \Rightarrow q_{1i}^2 + q_{2i}^2 + \dots + q_{(i-1)i}^2 + q_{ii}^2 = 1 \Rightarrow q_{ii}^2 = 1 \Rightarrow q_{ii} = \pm 1$$

$$\sum_{k=1}^{i} q_{ki}q_{kj} = 0 \Rightarrow q_{1i}q_{1j} + q_{2i}q_{2j} + \dots + q_{(i-1)i}q_{(i-1)j} + q_{ii}q_{ij} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{ii}q_{ij} = 0 \Rightarrow q_{ij} = 0, \ \forall j > i$$

Άρα, όλα τα στοιχεία και της i-γραμμής του Q είναι μηδέν εκτός από το q_{ii}. Επομένως, ο Q είναι διαγώνιος, και μάλιστα με στοιχεία ± 1 στην κύρια διαγώνιο.

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 9}}$

α) $Q = I - 2uu^T$

$$Q^T = (I - 2uu^T)^T = I - 2(uu^T)^T = I - 2\left[(u^T)^T u^T\right] = I - 2(uu^T) = Q$$

Άρα: $Q^TQ = QQ = QQ^T$, και

$$Q^TQ = Q^2 = (I - 2uu^T)(I - 2uu^T) =$$
$$= I - 2uu^T - 2uu^T + 4(uu^T)(uu^T) =$$
$$= I - 4uu^T + 4u(u^Tu)u^T = I - 4uu^T + 4u(u \cdot u)u^T =$$
$$= I - 4uu^T + 4\|u\|^2 uu^T = I - 4uu^T + 4uu^T = I$$

Επομένως, $Q^TQ = QQ^T = I$ δηλ. ο Q είναι ορθογώνιος.

β) $$uu^T = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Άρα: $$Q = I - 2uu^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{14} & X_1 \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{14} & X_2 \\ 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{14} & X_3 \end{bmatrix}$$

$$Q^T Q = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{14} & 2/\sqrt{14} & -3/\sqrt{14} \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{14} & X_1 \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{14} & X_2 \\ 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{14} & X_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & (X_1+2X_2-3X_3)/\sqrt{14} \\ \frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}} & \frac{X_1+2X_2-3X_3}{\sqrt{14}} & X_1^2+X_2^2+X_3^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα: $\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 0 & (1) \\ X_1 + 2X_2 - 3X_3 = 0 & (2) \\ X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1 & (3) \end{cases}$

Από το σύστημα των (1) και (2) έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_2 - 4X_3 = 0 \Leftrightarrow X_2 = 4X_3 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 0 \Rightarrow X_1 + 5X_3 = 0 \Leftrightarrow X_1 = -5X_3 \end{cases}$$

Επομένως: $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5X_3 \\ 4X_3 \\ X_3 \end{bmatrix}$ (4)

Αντικαθιστώντας την (4) στην (3) προκύπτει ότι:

$$25x_3^2 + 16x_3^2 + x_3^2 = 1 \Leftrightarrow 42x_3^2 = 1 \Leftrightarrow x_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{42}}$$

Άρα: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/\sqrt{42} \\ 4/\sqrt{42} \\ 1/\sqrt{42} \end{bmatrix}$ ή $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/\sqrt{42} \\ -4/\sqrt{42} \\ -1/\sqrt{42} \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ 11

α) $$(Q_1Q_2)^T(Q_1Q_2) = (Q_2^T Q_1^T)(Q_1 Q_2) = Q_2^T \underbrace{(Q_1^T Q_1)}_{I} Q_2 =$$

$$= Q_2^T Q_2 = I$$

Άρα, ο Q_1Q_2 είναι ορθογώνιος

β) $\forall$ διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ η γραμμική απεικόνιση $f_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με $f_1(v) = Q_1 v$, περιστρέφει το v κατά γωνία θ, ενώ η γραμμική απεικόνιση $f_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με $f_2(v) = Q_2 v$, περιστρέφει το v κατά γωνία φ.

Το γινόμενο Q_1Q_2 είναι ο πίνακας της σύνθεσης $h = f_1 \circ f_2$ δηλαδή, $h(v) = f_1(f_2(v)) = Q_1Q_2 v$, η οποία εκφράζει περιστροφή του διανύσματος v κατά γωνία φ και κατόπιν, περιστροφή του αποτελέσματος $f_2(v)$ κατά γωνία θ. Άρα συνολικά, το Q_1Q_2 αντιπροσωπεύει περιστροφή του v κατά γωνία $\varphi + \theta$

γ) $Q_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $Q_2 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$

και $Q_1Q_2 = \begin{bmatrix} \cos(\varphi+\theta) & -\sin(\varphi+\theta) \\ \sin(\varphi+\theta) & \cos(\varphi+\theta) \end{bmatrix}$

Άρα: $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi+\theta) & -\sin(\varphi+\theta) \\ \sin(\varphi+\theta) & \cos(\varphi+\theta) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & -(\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi) \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\varphi+\theta) & -\sin(\varphi+\theta) \\ \sin(\varphi+\theta) & \cos(\varphi+\theta) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

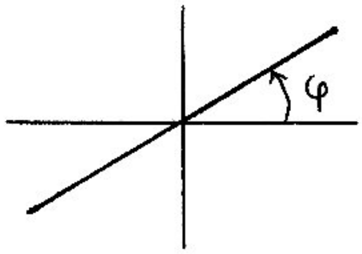
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(\varphi+\theta) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \\ \sin(\varphi+\theta) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Αν Q είναι ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που περιστρέφει κάθε διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ κατά $\theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$, τότε $f(v) = Qv$, με

$$Q = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Επίσης, αν H είναι ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που ανακλά κάθε διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ ως προς την ευθεία που περνά από το $(0,0)$ και σχηματίζει γωνία φ με το θετικό οριζόντιο ημιάξονα:



τότε $g(v) = Hv$, με

$$H = \begin{bmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{bmatrix}$$

Εδώ έχουμε την ευθεία $y = \sqrt{5}x$, και επομένως $\varphi = \arctan(\sqrt{5})$

και $\begin{cases} \cos(2\varphi) = 2\cos^2\varphi - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\varphi} - 1 = \frac{2}{1+5} - 1 = -2/3 \\ \sin(2\varphi) = \pm\sqrt{1-\cos^2(2\varphi)} = \pm\sqrt{(1-4/9)} = \pm\sqrt{5}/3 \end{cases}$ και επειδή η φ είναι

στο 1ο τεταρτημόριο, θα είναι $\sin(2\varphi) = \sqrt{5}/3$. Επομένως:

$$H = \begin{bmatrix} -2/3 & \sqrt{5}/3 \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & 2/3 \end{bmatrix}$$

Η γραμμική απεικόνιση που πρώτα περιστρέφει κάθε διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ κατά γωνία $60°$ και κατόπιν το ανακλά ως προς την ευθεία $y = \sqrt{5}\,x$ είναι η σύνθεση $h(v) = (g \circ f)(v) = g(f(v))$ με πίνακα το γινόμενο HQ. Δηλ.

$h(v) = HQv$ και ο ζητούμενος πίνακας είναι ο

$$HQ = \begin{bmatrix} -2/3 & \sqrt{5}/3 \\ \sqrt{5}/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{15}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{6} \\ \frac{\sqrt{5}}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{15}}{6} \end{bmatrix}$$