ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Γραμμική Άλγεβρα & Αναλυτική Γεωμετρία» (ΕΜ111) – Χειμερινό Εξάμηνο 2008-2009
Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

10^Ο^ ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Έστω *V* ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $\mathbb{B}=\left\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_n\right\}$, $\mathbb{B}'=\left\{\vec{b}_1',\vec{b}_2',\ldots,\vec{b}_n'\right\}$ δυο διατεταγμένες βάσεις του *V*.

α) Δείξτε ότι για κάθε διάνυσμα $\vec{v}\in V$, οι στήλες των συντεταγμένων

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\vec{x} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}=\vec{x}'$$

του $\vec{v}$ ως προς τις βάσεις $\mathbb{B}$ και $\mathbb{B}'$, αντίστοιχα, συνδέονται με τη σχέση $\vec{x}'=A\vec{x}$, όπου *A* είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B}\mapsto\mathbb{B}'$.

β) Δείξτε το αντίστροφο, δηλαδή ότι αν *A* είναι ο πίνακας που μετασχηματίζει τις συντεταγμένες ως προς $\mathbb{B}$ σε συντεταγμένες ως προς $\mathbb{B}'$, τότε ο *A* είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B}\mapsto\mathbb{B}'$.

Άσκηση 2: Έστω *V* ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $\mathbb{B}=\left\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_n\right\}$, $\mathbb{B}'=\left\{\vec{b}_1',\vec{b}_2',\ldots,\vec{b}_n'\right\}$ δυο διατεταγμένες βάσεις του *V*. Αν *A* είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B}\mapsto\mathbb{B}'$, δείξτε ότι ο A^{-1} είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B}'\mapsto\mathbb{B}$.

Άσκηση 3: Έστω $\mathbb{B}=\left\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_k\right\}$ μια οποιαδήποτε βάση ενός πραγματικού διανυσματικού χώρου *V*. Αν $\mathbb{B}'=\left\{\vec{q}_1,\vec{q}_2,\ldots,\vec{q}_k\right\}$ είναι η ορθογώνια βάση που προκύπτει από την $\mathbb{B}$ με τη μέθοδο Gram-Schmidt, τότε υπολογίστε τον πίνακα αλλαγής βάσης $\mathbb{B}\mapsto\mathbb{B}'$.

Άσκηση 4: Έστω *V* ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $\mathbb{B}=\left\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\right\}$ μια διατεταγμένη βάση του *V*. Θεωρούμε τα $\vec{b}_1',\vec{b}_2',\vec{b}_3'\in V$ με: $\vec{b}_1'=2\vec{b}_1+\vec{b}_2-\vec{b}_3$, $\vec{b}_2'=\vec{b}_1+\vec{b}_2$, $\vec{b}_3'=\vec{b}_3$, και τη γραμμική απεικόνιση $f:V\to V$ με: $f\left(\vec{b}_1\right)=2\vec{b}_1-\vec{b}_2$, $f\left(\vec{b}_2\right)=\vec{b}_1+\vec{b}_2$, $f\left(\vec{b}_3\right)=\vec{b}_3$.

α) Δείξτε ότι τα $\vec{b}_1',\vec{b}_2',\vec{b}_3'$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και συμπεράνατε ότι το $\mathbb{B}'=\left\{\vec{b}_1',\vec{b}_2',\vec{b}_3'\right\}$ είναι μια άλλη διατεταγμένη βάση του *V*.

β) Βρείτε τον πίνακα αλλαγής βάσης $\mathbb{B}'\mapsto\mathbb{B}$.

γ) Ποιες είναι οι συντεταγμένες των $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ ως προς τη βάση $\mathbb{B}'$.

δ) Βρείτε τον πίνακα της *f* ως προς τη βάση $\mathbb{B}$ και τον πίνακα της *f* ως προς τη $\mathbb{B}'$.

Άσκηση 5: Έστω $\mathbb{B}=\left\{(1,0,-2),(0,1,-1)\right\}$ και $\mathbb{B}'=\left\{(2,3,-7),(3,3,-9)\right\}$ δυο βάσεις του διανυσματικού υπόχωρου $V=\left\{(x,y,z)\ \backslash\ 2x+y+z=0,\ x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$ του $\mathbb{R}^3$.

α) Βρείτε τον πίνακα αλλαγής βάσης $\mathbb{B}\mapsto\mathbb{B}'$.

β) Βρείτε τον πίνακα αλλαγής βάσης $\mathbb{B}'\mapsto\mathbb{B}$.

γ) Έστω ένα διάνυσμα $\vec{v}\in V$ με συντεταγμένες ως προς την $\mathbb{B}$ τις $(3,-1)$. Βρείτε τις συντεταγμένες του $\vec{v}$ ως προς την $\mathbb{B}'$. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του $\vec{v}$ ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$;

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ & ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (ΕΜ-111)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ $10_{ου}$ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 1}}$

α) Αφού $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$ ως προς τη βάση $\mathbb{B}$, ισχύει ότι:

$$\vec{v} = x_1 \vec{b_1} + x_2 \vec{b_2} + \ldots x_n \vec{b_n} \qquad (1)$$

Επίσης, αν $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B} \mapsto \mathbb{B}'$, ισχύει ότι:

$$\left.\begin{aligned}
\vec{b_1} &= \alpha_{11} \vec{b'_1} + \alpha_{21} \vec{b'_2} + \ldots + \alpha_{n1} \vec{b'_n} \\
\vec{b_2} &= \alpha_{12} \vec{b'_1} + \alpha_{22} \vec{b'_2} + \ldots + \alpha_{n2} \vec{b'_n} \\
&\vdots \\
\vec{b_n} &= \alpha_{1n} \vec{b'_1} + \alpha_{2n} \vec{b'_2} + \ldots + \alpha_{nn} \vec{b'_n}
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας τις (2) στην (1) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
\vec{v} = {} & x_1 \left(\alpha_{11} \vec{b'_1} + \alpha_{21} \vec{b'_2} + \ldots + \alpha_{n1} \vec{b'_n}\right) + \\
& + x_2 \left(\alpha_{12} \vec{b'_1} + \alpha_{22} \vec{b'_2} + \ldots + \alpha_{n2} \vec{b'_n}\right) + \ldots \\
& \ldots + x_n \left(\alpha_{1n} \vec{b'_1} + \alpha_{2n} \vec{b'_2} + \ldots + \alpha_{nn} \vec{b'_n}\right) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{v} = {} & \left(x_1 \alpha_{11} + x_2 \alpha_{12} + \ldots + x_n \alpha_{1n}\right) \vec{b'_1} + \\
& + \left(x_1 \alpha_{21} + x_2 \alpha_{22} + \ldots + x_n \alpha_{2n}\right) \vec{b'_2} + \ldots \\
& \ldots + \left(x_1 \alpha_{n1} + x_2 \alpha_{n2} + \ldots + x_n \alpha_{nn}\right) \vec{b'_n}
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

δηλ. οι συντεταγμένες του $\vec{v}$ ως προς τη $\mathbb{B}'$ είναι:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \alpha_{11} + x_2 \alpha_{12} + \dots + x_n \alpha_{1n} \\ x_1 \alpha_{21} + x_2 \alpha_{22} + \dots + x_n \alpha_{2n} \\ \vdots \\ x_1 \alpha_{n1} + x_2 \alpha_{n2} + \dots + x_n \alpha_{nn} \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \iff \vec{x}' = A\vec{x}$$

β) Αφού ο πίνακας A μετασχηματίζει τις συντεταγμένες ως προς την $\mathbb{B}$ σε συντεταγμένες ως προς τη $\mathbb{B}'$, τότε, επειδή το $\vec{b}_1$ έχει συντεταγμένες $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ως προς την $\mathbb{B}$, το γινόμενο

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{1η στήλη} \\ \text{του } A \end{bmatrix}$$

θα είναι οι συντεταγμένες του $\vec{b}_1$ ως προς την $\mathbb{B}'$.

Ομοίως, το $\vec{b}_j$ με συντεταγμένες $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j\text{-θέση}$ ως προς την $\mathbb{B}$, θα έχει συντεταγμένες ως προς $\mathbb{B}'$ τις

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\text{-στήλη} \\ \text{του } A \end{bmatrix} \quad \forall \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Άρα, οι στήλες του A είναι οι συντεταγμένες των $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ ως προς την $\mathbb{B}'$. Επομένως, ο A είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B} \longmapsto \mathbb{B}'$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Αφού ο A είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B} \mapsto \mathbb{B}'$, αν $\vec{v} \in V$ είναι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα του V με συντεταγμένες $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ως προς την $\mathbb{B}$, και $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$ ως προς την $\mathbb{B}'$, τότε:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \exists A^{-1} \\ \text{αφού ο } A \\ \text{είναι πίνακας} \\ \text{αλλαγής βάσης}}}{\Longrightarrow} A^{-1} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = A^{-1} A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = I_n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

Άρα, για κάθε διάνυσμα v του V, ο A^{-1} μετασχηματίζει τις συντεταγμένες ως προς την $\mathbb{B}'$ σε συντεταγμένες ως προς την $\mathbb{B}$. Επομένως (βλ. ερώτημα β, Άσκηση 1) είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B}' \mapsto \mathbb{B}$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Αν $\mathbb{B}' = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_k\}$ είναι η ορθογώνια βάση που προκύπτει από την $\mathbb{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k\}$ με τη μέθοδο Gram-Schmidt, τότε:

$$\vec{q}_1 = \vec{b}_1 \Leftrightarrow \boxed{\vec{b}_1 = \vec{q}_1}$$

$$\vec{q}_2 = \vec{b}_2 - \mathrm{pr}_{\vec{q}_1}\left(\vec{b}_2\right) = \vec{b}_2 - \frac{\left(\vec{b}_2 \cdot \vec{q}_1\right)}{\|\vec{q}_1\|^2}\vec{q}_1 \Rightarrow \boxed{\vec{b}_2 = \frac{\left(\vec{b}_2 \cdot \vec{q}_1\right)}{\|\vec{q}_1\|^2}\vec{q}_1 + \vec{q}_2}$$

$$\vec{q}_3 = \vec{b}_3 - pr_{\vec{q}_1}\left(\vec{b}_3\right) - pr_{\vec{q}_2}\left(\vec{b}_3\right) = \vec{b}_3 - \frac{\left(\vec{b}_3 \cdot \vec{q}_1\right)}{\|\vec{q}_1\|^2}\vec{q}_1 - \frac{\left(\vec{b}_3 \cdot \vec{q}_2\right)}{\|\vec{q}_2\|^2}\vec{q}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{b}_3 = \frac{\left(\vec{b}_3 \cdot \vec{q}_1\right)}{\|\vec{q}_1\|^2}\vec{q}_1 + \frac{\left(\vec{b}_3 \cdot \vec{q}_2\right)}{\|\vec{q}_2\|^2}\vec{q}_2 + \vec{q}_3}$$

$\vdots$

$$\vec{q}_k = \vec{b}_k - pr_{\vec{q}_1}\left(\vec{b}_k\right) - pr_{\vec{q}_2}\left(\vec{b}_k\right) - \cdots - pr_{\vec{q}_{k-1}}\left(\vec{b}_k\right) =$$

$$= \vec{b}_k - \frac{\left(\vec{b}_k \cdot \vec{q}_1\right)}{\|\vec{q}_1\|^2}\vec{q}_1 - \frac{\left(\vec{b}_k \cdot \vec{q}_2\right)}{\|\vec{q}_2\|^2}\vec{q}_2 - \cdots - \frac{\left(\vec{b}_k \cdot \vec{q}_{k-1}\right)}{\|\vec{q}_{k-1}\|^2}\vec{q}_{k-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{b}_k = \frac{\left(\vec{b}_k \cdot \vec{q}_1\right)}{\|\vec{q}_1\|^2}\vec{q}_1 + \frac{\left(\vec{b}_k \cdot \vec{q}_2\right)}{\|\vec{q}_2\|^2}\vec{q}_2 + \cdots + \frac{\left(\vec{b}_k \cdot \vec{q}_{k-1}\right)}{\|\vec{q}_{k-1}\|^2}\vec{q}_{k-1} + \vec{q}_k}$$

Ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k$ ως προς την $\mathbb{B}'$. Άρα, είναι ο πίνακας:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\left(\vec{b}_2 \cdot \vec{q}_1\right)}{\|\vec{q}_1\|^2} & \frac{\left(\vec{b}_3 \cdot \vec{q}_1\right)}{\|\vec{q}_1\|^2} & \cdots & \frac{\left(\vec{b}_k \cdot \vec{q}_1\right)}{\|\vec{q}_1\|^2} \\ 0 & 1 & \frac{\left(\vec{b}_3 \cdot \vec{q}_2\right)}{\|\vec{q}_2\|^2} & \cdots & \frac{\left(\vec{b}_k \cdot \vec{q}_2\right)}{\|\vec{q}_2\|^2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{\left(\vec{b}_k \cdot \vec{q}_3\right)}{\|\vec{q}_3\|^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

α) Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ με στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{b}_1', \vec{b}_2', \vec{b}_3'$ ως προς τη βάση $\mathbb{B}$. Έχουμε:

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-1 = 1 \neq 0, \text{ και άρα } \dim R(A) = n = 3$$

Επομένως, τα $\vec{b}_1', \vec{b}_2', \vec{b}_3'$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αφού $\dim V = 3$, το σύνολο $\mathbb{B}' = \{\vec{b}_1', \vec{b}_2', \vec{b}_3'\}$ είναι μια διατεταγμένη βάση του V.

β) Ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B}' \mapsto \mathbb{B}$ έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των $\vec{b}_1', \vec{b}_2', \vec{b}_3'$ ως προς την $\mathbb{B}$. Άρα είναι ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ που θεωρήσαμε στο ερώτημα (α).

γ) Οι συντεταγμένες των $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ ως προς την $\mathbb{B}'$ είναι οι στήλες του πίνακα αλλαγής βάσης $\mathbb{B} \mapsto \mathbb{B}'$, δηλ. οι στήλες του A^{-1}. Έχουμε: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A)$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det(A_{11}) & -\det(A_{12}) & \det(A_{13}) \\ -\det(A_{21}) & \det(A_{22}) & -\det(A_{23}) \\ \det(A_{31}) & -\det(A_{32}) & \det(A_{33}) \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\det A = 1}{\Longrightarrow} A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Επομένως, οι συντεταγμένες των $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ ως προς $\mathbb{B}'$ είναι $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ αντίστοιχα.

δ) Ο πίνακας της f ως προς $\mathbb{B}$ έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $f(\vec{b}_1)$, $f(\vec{b}_2)$, $f(\vec{b}_3)$ ως προς την $\mathbb{B}$. Άρα είναι ο πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επειδή A είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B}' \mapsto \mathbb{B}$, ο πίνακας της f ως προς την $\mathbb{B}'$ είναι ο εξής:

$$B' = A^{-1} B A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -7 & -3 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

α) Έστω $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_1' = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_2' = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -9 \end{bmatrix}$

δηλ. $\mathbb{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ και $\mathbb{B}' = \{\vec{b}_1', \vec{b}_2'\}$

Επειδή $\vec{b}_1, \vec{b}_2 \in V$ και $\mathbb{B}'$ είναι μια βάση του V, θα υπάρχουν συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, τέτοιοι ώστε:

$$\vec{b}_1 = \lambda_1 \vec{b}_1' + \lambda_2 \vec{b}_2' \qquad (1)$$

$$\vec{b}_2 = \lambda_3 \vec{b}_1' + \lambda_4 \vec{b}_2' \qquad (2)$$

Ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ ως προς την $\mathbb{B}'$. Άρα είναι ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός των $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$:

Από την εξίσωση (1) έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -9 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \\ -7 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

απαλοιφή Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ -7 & -9 & -2 \end{array}\right] \begin{matrix} (-3/2) & 7/2 \\ \leftarrow (+) & \\ & \leftarrow (+) \end{matrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ 1 \\ \leftarrow (+) \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \quad \text{Άρα:} \begin{cases} -\frac{3}{2}\lambda_2 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \boxed{\lambda_2 = 1} \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -1} \end{cases}$$

Από την εξίσωση (2) έχουμε:

$$\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} = \lambda_3\begin{bmatrix}2\\3\\-7\end{bmatrix} + \lambda_4\begin{bmatrix}3\\3\\-9\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 3\\-7 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_3\\\lambda_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \qquad (4)$$

όπου ο πίνακας στο αριστερό μέρος της (4) είναι ίδιος με εκείνον στην (3), και άρα χρειάζονται τα ίδια στάδια απαλοιφής. Εφαρμόζοντας αυτά τα στάδια στο διάνυσμα του δεξιού μέρους της (4) έχουμε:

$$\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \xrightarrow{(-3/2)\,(+),\ \ 7/2\,(+)} \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \xrightarrow{1\,(+)} \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\text{Άρα: } \begin{cases} -\frac{3}{2}\lambda_4 = 1 \Leftrightarrow \boxed{\lambda_4 = -\frac{2}{3}} \\ 2\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_3 = -\frac{3}{2}\lambda_4 \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = 1} \end{cases}$$

Επομένως: $\quad A = \begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & -2/3\end{bmatrix}$

β) Αφού ο A είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B} \mapsto \mathbb{B}'$,
ο A^{-1} είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B}' \mapsto \mathbb{B}$
Δηλαδή, ο πίνακας:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix}-2/3 & -1\\-1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{(-1/3)}\begin{bmatrix}-2/3 & -1\\-1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 3\end{bmatrix}$$

γ) Έστω $\vec{X} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$ οι συντεταγμένες του $\vec{v}$ ως προς την $\mathbb{B}$. Τότε οι συντεταγμένες του $\vec{v}$ ως προς την $\mathbb{B}'$ θα είναι:

$$\vec{X}' = A\vec{X} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & -2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\11/3\end{bmatrix}$$

δηλ. $\vec{v} = 3\vec{b_1} - \vec{b_2} = -4\vec{b_1'} + \frac{11}{3}\vec{b_2'}$

Επίσης, $\vec{v} = 3\vec{b_1} - \vec{b_2} = 3\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\\-5\end{bmatrix}$ οι συντεταγμένες

του $\vec{v}$ ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$