ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Γραμμική Άλγεβρα Ι» (ΕΜ111) – Χειμερινό Εξάμηνο 2006-2007, Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

9$^{\text{ο}}$ ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Δείξτε ότι η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ με $f(x,y)=(2x,y)$ είναι γραμμική απεικόνιση και βρείτε τον $\ker f$. Είναι η f "1-1";

Άσκηση 2: Δείξτε ότι η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ με $f(x,y,z)=(2x,y^3)$ δεν είναι γραμμική.

Άσκηση 3: Βρείτε πίνακα A στον οποίο αντιστοιχεί η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ με $f(x,y)=(2x+y,3y,x-y)$.

Άσκηση 4: Εξηγήστε γιατί μια γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ δεν μπορεί να είναι "επί".

Άσκηση 5: Έστω *V*, *W* διανυσματικοί χώροι επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $f:V\to W$ γραμμική απεικόνιση. Αν $\dim V=\dim W$, τότε δείξτε ότι η *f* είναι "1-1" αν και μόνο αν η *f* είναι "επί".

Άσκηση 6: Βρείτε τον πίνακα που αντιστοιχεί στη γραμμική απεικόνιση η οποία απεικονίζει τα διανύσματα $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ και $(0,0,1)$ στα διανύσματα $(1,5,2,9)$, $(2,6,4,7)$, $(\sqrt{3},3,7,1)$, αντίστοιχα.

Άσκηση 7: Έστω *V* ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $\mathbb{B}=\{b_1,b_2,b_3\}$ μια διατεταγμένη βάση του *V*. Έστω $v_1,v_2,v_3\in V$ με: $v_1=b_1+b_2+2b_3$, $v_2=b_1+b_3$, $v_3=2b_1+b_2+3b_3$. Να βρεθεί μια βάση του χώρου $\langle v_1,v_2,v_3\rangle$.

Άσκηση 8: Έστω *V* ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $\mathbb{B}=\{b_1,b_2,b_3\}$ μια διατεταγμένη βάση του *V*. Έστω $v_1,v_2,v_3\in V$ με: $v_1=b_1+b_3$, $v_2=2b_1+b_2$, $v_3=3b_1+2b_2+3b_3$. Δείξτε ότι το $\{v_1,v_2,v_3\}$ αποτελεί βάση του *V*.

Άσκηση 9: Έστω *V* ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $\mathbb{B}=\{b_1,b_2,b_3\}$ μια διατεταγμένη βάση του *V*. Έστω $v_1,v_2,v_3\in V$ με: $v_1=b_1+b_2+2b_3$, $v_2=b_1+b_3$, $v_3=2b_1+b_2+3b_3$. Έστω επίσης: $w_1=v_1-v_3$, $w_2=v_2-v_1+v_3$, $w_3=v_1$. Δείξτε ότι $\langle w_1,w_2,w_3\rangle=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$.

Άσκηση 10: Έστω *V*, *W* διανυσματικοί χώροι επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και οι διατεταγμένες βάσεις τους $\mathbb{B}=\{b_1,b_2,b_3\}$, $\mathbb{B}'=\{b_1',b_2',b_3',b_4'\}$ αντίστοιχα. Έστω η γραμμική απεικόνιση $f:V\to W$ με: $f(b_1)=b_1'+b_2'$, $f(b_2)=2b_1'+b_3'$, $f(b_3)=3b_1'+b_2'+b_3'$. Να βρεθούν βάσεις των $\ker f$ και $\operatorname{Im} f$.

Άσκηση 11: Έστω *V* ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $\mathbb{B}=\{b_1,b_2,b_3\}$ μια διατεταγμένη βάση του *V*. Έστω η γραμμική απεικόνιση $f:V\to V$ με: $f(b_1)=2b_1+4b_2+b_3$, $f(b_2)=3b_1+b_2-b_3$, $f(b_3)=-b_1+2b_2+b_3$.

α) Δείξτε ότι υπάρχει η f^{-1} αφού πρώτα βρείτε τον πίνακα της *f* ως προς τη $\mathbb{B}$.

β) Βρείτε τον πίνακα της f^{-1} ως προς τη $\mathbb{B}$.

Άσκηση 12: Έστω η γραμμική απεικόνιση $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ που ορίζεται από τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

α) Δείξτε ότι η απεικόνιση είναι "επί".

β) Βρείτε ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$ με την ιδιότητα $L_A(v) = (-2,5)$

γ) Βρείτε τον πυρήνα $\ker(L_A)$ της απεικόνισης L_A.

Άσκηση 13: Δίνεται ο υπόχωρος $W = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus x - 2y = 0\right\}$ του $\mathbb{R}^2$.

α) Βρείτε μια βάση του *W* και τη διάσταση του.

β) Βρείτε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ έτσι ώστε $W = \mathcal{N}(A)$.

γ) Βρείτε πίνακα $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ έτσι ώστε $W = \mathcal{N}(B)$.

δ) Βρείτε γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε $W = \ker f$.

Άσκηση 14: Έστω *V*, *W* διανυσματικοί χώροι επί ενός σώματος $\mathbb{F}$. Δείξτε ότι εάν $\mathbb{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ είναι μια βάση του *V* και $f : \mathbb{B} \to W$ μια απεικόνιση, τότε υπάρχει ακριβώς μία γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$ τέτοια ώστε $L(b_i) = f(b_i)$, $\forall\, b_i \in \mathbb{B}$.

Άσκηση 15: Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $f(1,1,1) = (1,0,1)$, $f(0,1,-1) = (2,1,3)$, $f(1,2,1) = (1,1,2)$ και

α) Βρείτε τον πίνακα *A* της απεικόνισης.

β) Δείξτε ότι η εικόνα της *f* είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$.

γ) Βρείτε τον πυρήνα της *f*

δ) Βρείτε έναν υπόχωρο *V* του $\mathbb{R}^3$ διαστάσεως 2 τέτοιον ώστε $f(V) = \operatorname{Im} f$.

ε) Βρείτε ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $f(v) = (6,-1,5)$.

στ) Βρείτε έναν υπόχωρο *W* του $\mathbb{R}^3$ διαστάσεως 2 τέτοιον ώστε η εικόνα $f(W)$ να είναι η ευθεία στον $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από το διάνυσμα $(6,-1,5)$.

Άσκηση 16: Εξετάστε αν οι απεικονίσεις που ορίζουν οι παρακάτω πίνακες είναι "1-1" ή "επί". Επίσης, υπολογίστε τον αριστερό ή δεξιό αντίστροφο τους στις περιπτώσεις που αυτοί υπάρχουν.

α) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, β) $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, γ) $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, δ) $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Άσκηση 17: Έστω ένα οποιοδήποτε διάνυσμα *v* του $\mathbb{R}^m$ και *W* ένας οποιοσδήποτε υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$. Αν $\mathbb{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ μια βάση του *W*, δείξτε ότι η προβολή του *v* στον *W* δίνεται ως $pr_W(v) = Pv$ με $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ όπου $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ο πίνακας με στήλες τις συντεταγμένες των $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Άσκηση 18: Δείξτε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ είναι πίνακας προβολής πάνω σε έναν υπόχωρο του $\mathbb{R}^m$ εάν και μόνον εάν ο *P* είναι συμμετρικός και $P^2 = P$.

Άσκηση 19: Βρείτε τον πίνακα προβολής *P* πάνω στον χώρο που παράγεται από τα διανύσματα $v_1 = (1,1,1,2)$, $v_2 = (-3,-1,0,2)$. Ποια η προβολή του διανύσματος $v = (7,5,1,0)$ πάνω στον $\langle v_1, v_2 \rangle$;

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (ΕΜ 111)

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ $9_{ου}$ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

$\forall\ v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ με $v_1=(x_1,y_1)$, $v_2=(x_2,y_2)$ ισχύουν:

1) $f(v_1)+f(v_2) = f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2) = (2x_1,y_1)+(2x_2,y_2) =$

$= (2x_1+2x_2,\ y_1+y_2) = (2(x_1+x_2),\ y_1+y_2) = f((x_1+x_2),(y_1+y_2))$

$= f(v_1+v_2) \quad , \quad \forall\ v_1,v_2 \in \mathbb{R}^2$

2) $\lambda f(v_1) = \lambda f(x_1,y_1) = \lambda(2x_1,y_1) = (2\lambda x_1, \lambda y_1) = f(\lambda x_1, \lambda y_1) =$

$= f(\lambda v_1) \quad \forall\ \lambda\in\mathbb{R}$ και $\forall\ v_1 \in \mathbb{R}^2$

Άρα η f είναι γρ. απεικόνιση

Έστω $v\in\mathbb{R}^2$ με $f(v)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (x,y)=(0,0) \Leftrightarrow v=0\in\mathbb{R}^2$

Άρα $\ker f=\{0\} \Leftrightarrow f$ είναι "1-1"

ΑΣΚΗΣΗ 2

$\forall\ v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ και $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda f(v) = \lambda(2x,y^3) = (2\lambda x, \lambda y^3) \\ f(\lambda v) = f(\lambda x,\lambda y,\lambda z) = (2\lambda x, \lambda^3 y^3) \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda f(v) \neq f(\lambda v) \ \text{(γενικά)}$$

Άρα η f δεν είναι γραμμική απεικόνιση.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Αν $\mathbb{B}=\{e_1, e_2\}$, $\mathbb{B}'=\{e_1', e_2', e_3'\}$ οι κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ αντίστοιχα, τότε:

$f(e_1)=f(1,0)=(2,0,1)=2e_1'+e_3'$

$f(e_2)=f(0,1)=(1,3,-1)=e_1'+3e_2'-e_3'$

Άρα $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ ως προς τις $\mathbb{B}$ και $\mathbb{B}'$

<u>Εναλλακτικά:</u>

$$\begin{bmatrix}2x+y\\ 3y\\ x-y\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Αν A ο πίνακας της απεικόνισης ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$, τότε έχουμε

$\{$η $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ είναι "επί"$\}\Leftrightarrow\{\forall\, w\in\mathbb{R}^3,\ \exists\, v\in\mathbb{R}^2$ τ.ω. $w=f(v)\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\{\forall\, w\in\mathbb{R}^3,\ \exists\, v\in\mathbb{R}^2$ τ.ω. $w=Av\}\Leftrightarrow\{$Το σύστημα $Ax=w$ έχει λύση $\forall\, w\in\mathbb{R}^3\}\Leftrightarrow R(A)=\mathbb{R}^3\Leftrightarrow \dim R(A)=3$ που είναι <u>αδύνατον</u>

αφού $A\in\mathbb{R}^{3\times 2}$ έχει 2 στήλες, οπότε $\dim R(A)\leq 2$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Έστω $\dim V = \dim W$.

$\{H\ f: V \to W$ είναι "1-1"$\} \Leftrightarrow \{\ker f = \{0\}\} \Leftrightarrow \{\dim(\ker f) = 0\}$

$\Leftrightarrow \dim V = \dim(\mathrm{Im} f) \underset{\dim W = \dim V}{\Leftrightarrow} \dim W = \dim(\mathrm{Im} f) \underset{\mathrm{Im} f \subseteq W}{\Leftrightarrow} W = \mathrm{Im} f$

$\Leftrightarrow \{\forall\, w \in W,\ \exists\, v \in V$ τ.ω. $f(v) = w\} \Leftrightarrow \{η\ f: V \to W$ είναι "επί"$\}$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Η απεικόνιση είναι $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

Τα διανύσματα $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ αποτελούν την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Άρα:

$$\left.\begin{aligned} f(e_1) &= (1,5,2,9) \\ f(e_2) &= (2,6,4,7) \\ f(e_3) &= (\sqrt{3},3,7,1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \sqrt{3} \\ 5 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 9 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Τα διανύσματα συντεταγμένων των $v_1, v_2, v_3 \in V$ ως προς την $\mathbb{B}$ είναι $(1,1,2)$, $(1,0,1)$ και $(2,1,3)$ αντίστοιχα.

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ με γραμμές αυτά τα διανύσματα συντεταγμένων

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Άρα $\{$μια βάση του $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle\} = \{$μια βάση του $R(A^T)\} = \{$μια βάση του $R(U^T)\} =$

$= \{(1,1,2), (0,-1,-1)\}$ ως προς την $\mathbb{B}$

δηλ. $\{$μια βάση του $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle\} = \{w_1, w_2\}$

με $w_1 = b_1 + b_2 + 2b_3$ και $w_2 = -b_2 - b_3$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Η $\mathbb{B}$ έχει 3 διανύσματα, άρα $\dim V = 3$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ο πίνακας με στήλες τις συντεταγμένες των v_1, v_2, v_3 ως προς $\mathbb{B}$

Έχουμε: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4 \neq 0$

Άρα, τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, και επειδή $\dim V = 3$ το $\{v_1, v_2, v_3\}$ είναι μια βάση του V

ΑΣΚΗΣΗ 9

Τα w_1, w_2, w_3 προκύπτουν από γραμμικούς συνδυασμούς των v_1, v_2, v_3.

Άρα $\langle w_1, w_2, w_3 \rangle \subseteq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ (1)

Αρκεί να δείξουμε ότι $\dim(\langle w_1, w_2, w_3 \rangle) = \dim(\langle v_1, v_2, v_3 \rangle)$

(βλ. Άσκηση 5γ(ii), φυλλάδιο 5ο)

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ο πίνακας με γραμμές τις συντ/μένες των v_1, v_2, v_3 ως προς $\mathbb{B}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Άρα: $\dim(\langle v_1, v_2, v_3 \rangle) = \dim R(A^T) = r(A) = 2$

Επίσης: $w_1 = v_1 - v_3 = b_1 + b_2 + 2b_3 - 2b_1 - b_2 - 3b_3 = -b_1 - b_3$

$w_2 = v_2 - v_1 + v_3 = b_1 + b_3 - b_1 - b_2 - 2b_3 + 2b_1 + b_2 + 3b_3 = 2b_1 + 2b_3$

$w_3 = v_1 = b_1 + b_2 + 2b_3$

Έστω $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Άρα: $\dim(\langle w_1, w_2, w_3 \rangle) = \dim R(B^T) = r(B) = 2$

Δηλ. $\dim(\langle w_1, w_2, w_3 \rangle) = \dim(\langle v_1, v_2, v_3 \rangle)$, οπότε λόγω της (1)

Ισχύει ότι $<w_1, w_2, w_3> = <v_1, v_2, v_3>$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Ο πίνακας A της απεικόνισης ως προς τις βάσεις $\mathbb{B}$, $\mathbb{B}'$ σχηματίζεται χρησιμοποιώντας ως στήλες τις συντ/γμένες των $f(b_1)$, $f(b_2)$, $f(b_3)$ ως προς την $\mathbb{B}'$. Άρα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

$\{$Βάση του $\mathrm{Im} f\} = \{$Βάση του $R(A)\} = \{$στήλες A που αντιστοιχούν στις στήλες του U με τους οδηγούς$\} = \{1_\eta, 2_\eta$ στήλη του $A\} =$

$= \{(1,1,0,0), (2,0,1,0)\}$ ως προς την $\mathbb{B}'$. Δηλαδή,

$\{$μια βάση του $\mathrm{Im} f\} = \{w_1, w_2\}$

με $w_1 = b_1' + b_2'$, $w_2 = 2b_1' + b_3'$

$$AX = 0 \Leftrightarrow UX = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = -x_3 \end{cases} \qquad \text{Άρα: } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\{$βάση του $\ker f\} = \{$βάση του $N(A)\} = \{(-1,-1,1)\}$ ως προς την $\mathbb{B}$

δηλ. $\{$βάση του $\ker f\} = \{v\}$ με $v = -b_1 - b_2 + b_3$

ΑΣΚΗΣΗ 11

α) Ο πίνακας της f ως προς τη βάση $\mathbb{B}$ σχηματίζεται χρησιμοποιώντας ως στήλες τις συντ/γμένες των $f(b_1)$, $f(b_2)$, $f(b_3)$ ως προς $\mathbb{B}$.

Άρα: $$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{\text{Η } f^{-1} \text{ υπάρχει}\} \text{ ανν } \{\exists\, A^{-1}\} \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

Έχουμε: $$\det A = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 8 + 7 = 5 \neq 0$$

Άρα $\exists\, f^{-1}$

β) Ο πίνακας της $f^{-1} : V \to V$ ως προς $\mathbb{B}$ είναι ο A^{-1}. Εφαρμόζοντας τη διαδικασία απαλοιφής Gauss-Jordan έχουμε:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5/2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 6/5 & -4/5 & 14/5 \\ 0 & -5 & 0 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \cdot(1/2) \\ \cdot(-1/5) \\ \cdot(-2) \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/5 & -2/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & 0 & -2/5 & 3/5 & -8/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Άρα $$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 & 7/5 \\ -2/5 & 3/5 & -8/5 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 12

α) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ \leftarrow (-) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = U$

$r(A) = 2 = m \iff L_A$ είναι "επί"

β) Έστω $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Τότε:

$$L_A(v) = (-2, 5) \iff A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \iff U \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5-2(-2) \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_2 + x_3 = 9 \iff x_2 = 9 - x_3 \\ x_1 + x_3 = -2 \iff x_1 = -2 - x_3 \end{cases}$$

Άρα $v = \begin{bmatrix} -2-x_3 \\ 9-x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ με $x_3 \in \mathbb{R}$ (1)

π.χ. $v = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ (για $x_3 = 1$)

γ) $\ker(L_A) = N(A)$

Από τη μορφή του v στην εξίσωση (1), όπου x_3 είναι ελεύθερη μεταβλητή, προκύπτει ότι η γενική λύση της ομογενούς $AX=0$ είναι η: $x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Άρα $\ker(L_A) = N(A) = \langle (-1,-1,1) \rangle$

ΑΣΚΗΣΗ 13

α) $\forall (x,y) \in W$ έχουμε $(x,y) = (2y, y) \iff (x,y) = y(2,1)$ με $y \in \mathbb{R}$

δηλ. $W = \langle (2,1) \rangle$. Άρα $\dim W = 1$ και μια βάση του W είναι το διάνυσμα $w = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

β) Έστω $A=[\alpha \;\; b]$. Θα πρέπει $\dim N(A)=1 \Leftrightarrow r(A)=2-1 \Leftrightarrow r(A)=1$

και επίσης $AW=0 \Leftrightarrow [\alpha \;\; b]\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \Leftrightarrow 2\alpha+b=0 \Leftrightarrow b=-2\alpha$

Επομένως: $A=[\alpha \;\; -2\alpha]$ με $\alpha\in\mathbb{R}^*$ (πρέπει $\alpha\neq 0$ έτσι ώστε $r(A)=1$)

π.χ. $A=[1 \;\; -2]$

γ) Ένας πίνακας $B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ με γραμμές πολλαπλάσια του $[\alpha \;\; -2\alpha]$ (με $\alpha\neq 0$) έχει $N(B)=N(A)$ μιας και σε τέτοια περίπτωση οι 2 εξισώσεις του συστήματος $BX=0$ έχουν τις ίδιες λύσεις, οπότε το σύνολο λύσεων της $AX=0$ ταυτίζεται με εκείνο του $BX=0$.

Άρα, π.χ. $B=\begin{bmatrix}1 & -2\\3 & -6\end{bmatrix}$

δ) Η f αντιστοιχεί σε ένα πίνακα $C\in\mathbb{R}^{1\times 2}$ με $\ker f=N(C)=W$

Άρα $C=A=[\alpha \;\; -2\alpha]$ με $\alpha\in\mathbb{R}^*$ και επομένως:

$$f(x,y)=C\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=[\alpha \;\; -2\alpha]\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\alpha(x-2y)$$

π.χ. $f(x,y)=x-2y$

ΑΣΚΗΣΗ 14

Αφού $\mathbb{B}=\{b_1,b_2,\dots,b_k\}$ είναι βάση του V, $\forall\, v\in V$ υπάρχουν μοναδικά $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k\in\mathbb{F}$ τέτοια ώστε: $v=\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\dots+\lambda_k b_k$ (1)

Ορίζουμε $L(v)=\lambda_1 f(b_1)+\lambda_2 f(b_2)+\dots+\lambda_k f(b_k)$. Από τη μοναδικότητα του γρ. συνδυασμού στην (1), συνεπάγεται ότι $\forall\, v\in V$, $\exists$ μοναδικό $L(v)$ και συνεπώς η L είναι απεικόνιση. Επίσης είναι γραμμική, αφού:

1) $L(\lambda v)=\lambda\lambda_1 f(b_1)+\lambda\lambda_2 f(b_2)+\dots+\lambda\lambda_k f(b_k)=$

$=\lambda(\lambda_1 f_1(b_1)+\lambda_2 f(b_2)+\dots+\lambda_k f(b_k))=\lambda L(v)$, $\forall\, v\in V, \forall\, \lambda\in\mathbb{F}$

2) $\forall\ v_1, v_2 \in V$, $\exists\ c_1, c_2, \dots, c_k, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in \mathbb{F}$ τ.ω.

$v_1 = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_k b_k$, $v_2 = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_k b_k$

και: $L(v_1 + v_2) = (c_1 + \mu_1) f(b_1) + (c_2 + \mu_2) f(b_2) + \dots + (c_k + \mu_k) f(b_k) =$

$$= c_1 f(b_1) + c_2 f(b_2) + \dots + c_k f(b_k) +$$

$$+ \mu_1 f(b_1) + \mu_2 f(b_2) + \dots + \mu_k f(b_k) = L(v_1) + L(v_2)$$

Για να δείξουμε ότι η L είναι μοναδική, θεωρούμε μια γραμμική απεικόνιση $M: V \to W$ τ.ω. $M(b_i) = f(b_i)\ \forall\ b_i \in \mathbb{B}$ (με $i = 1, 2, \dots, k$)

Τότε $\forall\ v \in V$ ισχύει η (1) και επομένως:

$M(v) = M(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_k b_k) = \lambda_1 M(b_1) + \lambda_2 M(b_2) + \dots + \lambda_k M(b_k) =$

$$= \lambda_1 f(b_1) + \lambda_2 f(b_2) + \dots + \lambda_k f(b_k) = L(v)$$

Άρα $M = L$ και η L είναι μοναδική.

ΑΣΚΗΣΗ 15

Έστω $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ο πίνακας με γραμμές τα διανύσματα $v_1 = (1,1,1)$ $v_2 = (0, 1, -1)$ και $v_3 = (1, 2, 1)$

$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$. Επομένως, τα v_1, v_2, v_3 είναι γρ. ανεξάρτητα και (επειδή $\dim \mathbb{R}^3 = 3$) αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$.

Άρα, σύμφωνα με την άσκηση 14, $\exists$ μοναδική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ τ.ω. $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$, $f(v_3) = w_3$ όπου $w_1 = (1,0,1)$ $w_2 = (2,1,3)$, $w_3 = (1,1,2)$

α) Ξέρουμε ότι $f(v_1) = (1,0,1) = e_1 + e_3$, $f(v_2) = (2,1,3) = 2e_1 + e_2 + 3e_3$, $f(v_3) = (1,1,2) = e_1 + e_2 + 2e_3$, όπου $\{e_1, e_2, e_3\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, και επιπλέον ότι $\mathbb{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ βάση του $\mathbb{R}^3$. Άρα:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$ ως προς την $\mathbb{B}$ και την κανονική βάση $\mathbb{B}' = \{e_1, e_2, e_3\}$

Για να βρούμε τον πίνακα A της f ως προς την κανονική βάση $\mathbb{B}'$ εργαζόμαστε ως εξής:

$$f(v_1) = e_1 + e_3 \Rightarrow f(1,1,1) = e_1 + e_3 \Rightarrow f(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_3$$

$$\Rightarrow f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = e_1 + e_3 \qquad (1)$$

$$f(v_2) = 2e_1 + e_2 + 3e_3 \Rightarrow f(0,1,-1) = 2e_1 + e_2 + 3e_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(e_2 - e_3) = 2e_1 + e_2 + 3e_3 \Rightarrow f(e_2) - f(e_3) = 2e_1 + e_2 + 3e_3 \qquad (2)$$

$$f(v_3) = e_1 + e_2 + 2e_3 \Rightarrow f(1,2,1) = e_1 + e_2 + 2e_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(e_1 + 2e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + 2e_3 \Rightarrow f(e_1) + 2f(e_2) + f(e_3) =$$

$$= e_1 + e_2 + 2e_3 \qquad (3)$$

Άρα $\{(1),(2),(3)\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 + e_3 \\ 2e_1 + e_2 + 3e_3 \\ e_1 + e_2 + 2e_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e_1 + e_3 \\ 2e_1 + e_2 + 3e_3 \\ e_1 + e_2 + 2e_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 + e_3 \\ 2e_1 + e_2 + 3e_3 \\ e_1 + e_2 + 2e_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e_1 - e_2 + 2e_3 \\ e_2 + e_3 \\ -2e_1 - 2e_3 \end{bmatrix}$$

Επομένως, ο πίνακας A της f ως προς την κανονική βάση είναι:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

β) $$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-1/3) & (2/3) \\ \leftarrow (-) & \\ & \leftarrow (-) \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \leftarrow (-) \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

{Βάση Im f} = {Βάση του $R(A)$} = {στήλες A που αντιστοιχούν στις στήλες του U με τους οδηγούς} = {1η, 2η στήλη του A} =

$= \{(3,-1,2), (0,1,1)\}$ ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

Οπότε, η εικόνα της f είναι το επίπεδο των διανυσμάτων $(3,-1,2)$ και $(0,1,1)$.

γ) $$f(X) = 0 \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow UX = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_2 = \frac{2}{3} X_3 \\ 3X_1 = 2X_3 \Rightarrow X_1 = \frac{2}{3} X_3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = X_3 \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_3 \in \mathbb{R}$$

{Βάση του Ker f} = {Βάση του $N(A)$} = $\{(2/3, 2/3, 1)\}$ ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

Άρα, ο πυρήνας της f είναι η ευθεία του διανύσματος $(\frac{2}{3}, 2/3, 1)$

δ) Κάθε διάνυσμα w του Imf γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων βάσης του Imf που υπολογίστηκαν στο ερώτημα β. Δηλαδή

$$w = \lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{με } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow w = \lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow w = A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = A \underbrace{\left(\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}_{v} \Rightarrow w = f(v)$$

Άρα $\forall\, w \in \mathrm{Im}f$, $\exists\, v \in \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$ τέτοιο ώστε $w = f(v)$

Επίσης $\dim(\langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle) = 2$ αφού τα δύο αυτά διανύσματα είναι γρ. ανεξάρτητα. Άρα, ο ζητούμενος διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ είναι ο $V = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$

ε) $$f(v) = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Av = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{απαλοιφή}} Uv = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 1 \\ \\ 3x_1 - 2x_3 = 6 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 1 + \frac{2}{3}x_3 \\ x_1 = 2 + \frac{2}{3}x_3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow v = \begin{bmatrix} 1 + \frac{2}{3}x_3 \\ 2 + 2/3\, x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

π.χ. για $x_3=1$, έχουμε $v=\begin{bmatrix}5/3\\8/3\\1\end{bmatrix}$

6τ) $\forall\, w\in W$, θα υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ τ.ω. $f(w)=\lambda\begin{bmatrix}6\\-1\\5\end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow A w=\lambda\begin{bmatrix}6\\-1\\5\end{bmatrix} \Leftrightarrow U w=\lambda\begin{bmatrix}6\\1\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}3 & 0 & -2\\0 & 1 & -2/3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}6\\1\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow w=\begin{bmatrix}\lambda+\frac{2}{3}x_3\\2\lambda+2/3\,x_3\\x_3\end{bmatrix},\quad \lambda, x_3\in\mathbb{R}$$

Άρα: $w=\lambda\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}2/3\\2/3\\1\end{bmatrix}$

Τα διανύσματα $(1,2,0)$ και $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και $w\in\langle(1,2,0),(\frac{2}{3},\frac{2}{3},1)\rangle$, $\forall\, w\in W$

Επιπλέον, $\dim(\langle(1,2,0),(\frac{2}{3},\frac{2}{3},1)\rangle)=2=\dim W$

Άρα: $W=\langle(1,2,0),(\frac{2}{3},\frac{2}{3},1)\rangle$

ΑΣΚΗΣΗ 16

Έστω $m=$ πλήθος γραμμών
$n=$ πλήθος στηλών

α) $\det A=0$, οπότε $r(A)<m=n$ και η απεικόνιση δεν είναι ούτε "1-1", ούτε "επί". Επίσης, $\nexists$ αριστερός ή δεξιός αντίστροφος.

β) $\det B=-6\neq 0$. Επομένως, $r(A)=m=n$ και η απεικόνιση είναι "1-1" και "επί". Επίσης, υπάρχουν αριστερός και δεξιός αντίστροφος ίσοι μεταξύ τους και ίσοι με $A^{-1}=\frac{1}{-6}\begin{bmatrix}1 & -2\\-3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/6 & 1/3\\1/2 & 0\end{bmatrix}$

γ) $r(C) = 1 = m < 3 = n$

Άρα, η απεικόνιση είναι "επί", αλλά όχι "1-1".

Επίσης, $\exists$ μόνο δεξιός αντίστροφος, ο οποίος ισούται με

$$C^T\left(C\,C^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\frac{1}{14} = \begin{bmatrix} 3/14 \\ 1/7 \\ -1/14 \end{bmatrix}$$

δ) $$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{matrix} -1/3 \\ (-) \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

Άρα $r(D) = 2 = m < 4 = n$

και επομένως, η απεικόνιση είναι "επί", αλλά όχι "1-1".

Επίσης, $\exists$ μόνο δεξιός αντίστροφος, ο οποίος ισούται με

$$D^T\left(CC^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{38}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 14 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7/38 & -4/19 \\ 0 & 0 \\ 4/19 & 9/19 \\ 1/38 & -6/19 \end{bmatrix}$$

Σημείωση: Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Αν ο A έχει δεξιό αντίστροφο, τότε αυτός ισούται με $A^T(AA^T)^{-1}$, ενώ αν ο A έχει αριστερό αντίστροφο, τότε αυτός ισούται με $(A^TA)^{-1}A^T$.

ΑΣΚΗΣΗ 17

Αφού $pr_W(v) \in W$, υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ τέτοια ώστε

$$pr_W(v) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n \Rightarrow pr_W(v) = A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow pr_W(v) = AX, \quad \text{όπου } X = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

Επίσης, $v - pr_W(v)$ ορθογώνιο στον W, και επειδή $W = R(A)$ (εξ' ορισμού του πίνακα A), το $v - pr_W(v)$ είναι ορθογώνιο στον $R(A)$. Επομένως, $v - pr_W(v) \in N(A^T) \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^T\left(v - pr_W(v)\right) = 0 \Rightarrow A^T(v - AX) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^T v = A^T A X \Rightarrow X = (A^T A)^{-1} A^T v \qquad (1)$$

όπου ο $A^T A$ είναι αντιστρέψιμος, επειδή $N(A^T A) = N(A)$ (βλ. Άσκηση 3, φυλλάδιο 8) και $\dim N(A) = 0 \Leftrightarrow \dim N(A^T A) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow r(A^T A) = n \Leftrightarrow \det(A^T A) \neq 0$

Αντικαθιστώντας την (1) στην εξίσωση $pr_W(v) = AX$ προκύπτει ότι

$$pr_W(v) = \underbrace{A(A^T A)^{-1} A^T}_{P} v = Pv$$

ΑΣΚΗΣΗ 18

Έστω $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ πίνακας προβολής πάνω σε έναν υπόχωρο W του $\mathbb{R}^m$, όπου A πίνακας με στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων μιας διατεταγμένης βάσης του W. Τότε:

$$P^T = \left[A(A^TA)^{-1}A^T\right]^T = (A^T)^T\left[(A^TA)^{-1}\right]^T A^T = A\left[(A^TA)^T\right]^{-1} A^T =$$

$$= A(A^TA)^{-1}A^T = P$$, δηλ. ο P είναι συμμετρικός

Επίσης, $P^2 = \left[A(A^TA)^{-1}A^T\right]\left[A(A^TA)^{-1}A^T\right] =$

$$= A\underbrace{(A^TA)^{-1}A^TA}_{I}(A^TA)^{-1}A^T = A(A^TA)^{-1}A^T = P$$

Αντιστρόφως, έστω ότι $P^2 = P = P^T$. Θα δείξουμε ότι ο P είναι ο πίνακας προβολής στον υπόχωρο $R(P)$.

$\forall\, b \in \mathbb{R}^m$, έχουμε ότι $Pb \in R(P)$.

Για να είναι το διάνυσμα Pb προβολή του b στον υπόχωρο $V = R(P)$, αρκεί το διάνυσμα $b - Pb$ να είναι ορθογώνιο στον V, δηλαδή αρκεί το $(b - Pb) \in N(P^T)$ (μιας και $V^\perp = N(P^T)$)

Έχουμε: $P^T(b - Pb) = P^Tb - P^TPb \underset{P^T = P}{=} Pb - P^2b =$

$\underset{P^2 = P}{=} Pb - Pb = 0$. Επομένως, $(b - Pb) \in N(P^T)$

Επομένως, P = πίνακας προβολής στον $R(P)$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 19}}$

Προφανώς $\nexists\, \lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $V_1 = \lambda V_2$. Άρα, τα V_1, V_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επομένως βάση του $\langle V_1, V_2 \rangle$. Επομένως,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$ (Βλ. εκφώνηση της άσκησης 17)

Ο πίνακας προβολής είναι $P = A(A^TA)^{-1}A^T$

Έχουμε: $A^TA \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$

Άρα: $(A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/7 & 0 \\ 0 & 1/14 \end{bmatrix}$

και $P = A(A^TA)^{-1}A^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/7 & 0 \\ 0 & 1/14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 11/14 & 5/14 & 1/7 & -1/7 \\ 5/14 & 3/14 & 1/7 & 1/7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 2/7 \\ -1/7 & 1/7 & 2/7 & 6/7 \end{bmatrix}$$

Η προβολή του διανύσματος $v = (7,5,1,0)$ πάνω στον υπόχωρο $\langle v_1, v_2 \rangle$ είναι ίση με

$$Pv = \begin{bmatrix} 52/7 \\ 26/7 \\ 13/7 \\ 0 \end{bmatrix}$$