ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Γραμμική Άλγεβρα Ι» (ΕΜ111) – Χειμερινό Εξάμηνο 2006-2007, Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

<u>8^{O} ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ</u>

Άσκηση 1: Βρείτε τα μήκη και το εσωτερικό γινόμενο των $v=(1,4,0,2)$ και $w=(2,-2,3,1)$, καθώς και τη μεταξύ τους απόσταση και γωνία.

Άσκηση 2: Έστω $b=\left(\sqrt{x},\sqrt{y}\right)$ και $a=\left(\sqrt{y},\sqrt{x}\right)$, όπου x, y θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Εφαρμόστε την ανισότητα του Schwarz και συγκρίνατε τον αριθμητικό μέσο $(x+y)/2$ με το γεωμετρικό μέσο $\sqrt{xy}$.

Άσκηση 3: Δείξτε ότι ο πίνακας $A^T A$ έχει τον ίδιο μηδενόχωρο με τον $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

Άσκηση 4: Αποδείξτε ότι η i-γραμμή ενός αντιστρέψιμου πίνακα είναι ορθογώνια στην j-στήλη του αντιστρόφου του, για κάθε $i\neq j$.

Άσκηση 5: Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αποδείξτε ότι:

α) $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)$, $\forall\, u,v\in V$

β) Αν $u\perp(v-w)$ και $v\perp(w-u)$, τότε $w\perp(u-v)$, $\forall\, u,v,w\in V$

γ) $u\perp\left[(u\cdot v)w-(u\cdot w)v\right]$, $\forall\, u,v,w\in V$

δ) Αν τα διανύσματα $(u+\lambda v)$, $(\lambda u-v)$ είναι κάθετα $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}$, τότε: (i) $u\perp v$, και (ii) αν $\|v\|=1$, τότε $\|3u+4v\|=5$.

Άσκηση 6: Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Schwarz, αποδείξτε ότι $\left(x_1+\cdots+x_n\right)^2\le n\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)$, για $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Άσκηση 7: Δείξτε ότι ο πίνακας προβολής P που προβάλλει κάθε διάνυσμα $v\in\mathbb{R}^n$ στην ευθεία ενός διανύσματος $w\in\mathbb{R}^n$ είναι συμμετρικός, ικανοποιεί τη σχέση $P^2=P$ και έχει ίχνος ίσο με 1.

Άσκηση 8: Βρείτε τον πίνακα προβολής που προβάλλει κάθε διάνυσμα του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ πάνω στην ευθεία $4x+3y=0$.

Άσκηση 9: Έστω $w=(1,3,-1,4)$. α) Βρείτε τον πίνακα προβολής P στο διάνυσμα w, β) Βρείτε μια βάση του μηδενόχωρου του P, γ) Βρείτε ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $v\in\mathbb{R}^4$ του οποίου η προβολή στο w να είναι το μηδενικό διάνυσμα.

Άσκηση 10: Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αποδείξτε ότι:

α) $(v-pr_w(v))\perp w$, $\forall\, v,w\in V$ με $w\neq\mathbf{0}$.

β) Για κάθε διάνυσμα $v\in V$ και $w_1,w_2,...,w_k\in V$ μη-μηδενικά αμοιβαίως ορθογώνια διανύσματα, το διάνυσμα $b=v-pr_{w_1}(v)-pr_{w_2}(v)-\cdots-pr_{w_k}(v)$ είναι κάθετο σε όλα τα $w_1,w_2,...,w_k$.

Άσκηση 11: Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και U, W ορθογώνιοι υπόχωροι του (δηλ. $U\perp W$). Δείξτε ότι $U\cap W=\{\mathbf{0}\}$.

Άσκηση 12: Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και W ένας υπόχωρος του. Δείξτε ότι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του W είναι επίσης διανυσματικός υπόχωρος του V.

Άσκηση 13: Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\dim V = n$. Αν $\{w_1, w_2, ..., w_k\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση ενός υποχώρου W του V, τότε δείξτε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

α) Αν $\{w'_1, w'_2, ..., w'_\ell\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $W^\perp$ τότε το $\{w_1, w_2, ..., w_k, w'_1, w'_2, ..., w'_\ell\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του V.

β) $W + W^\perp = W \oplus W^\perp = V$

γ) Αν επεκτείνουμε την ορθοκανονική βάση $\{w_1, w_2, ..., w_k\}$ του W σε ορθοκανονική βάση $\{w_1, w_2, ..., w_k, w_{k+1}, w_{k+2}, ..., w_n\}$ του V τότε το $\{w_{k+1}, w_{k+2}, ..., w_n\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του $W^\perp$.

δ) $(W^\perp)^\perp = W$

Άσκηση 14: Έστω τα διανύσματα $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,0,1,1)$, $v_3 = (1,0,-1,0)$ του Ευκλείδιου χώρου $\mathbb{R}^4$.

α) Βρείτε μια ορθοκανονική βάση του $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

β) Βρείτε μια ορθοκανονική βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος του $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

γ) Γράψτε το διάνυσμα $v = (-4,15,7,8)$ ως άθροισμα $v = u + w$, όπου $u \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ και $w \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle^\perp$.

Άσκηση 15: Έστω τα διανύσματα $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,0,-1)$, του Ευκλείδιου χώρου $\mathbb{R}^3$ και $V = \langle v_1, v_2 \rangle$.

α) Βρείτε μια ορθοκανονική βάση του V και επεκτείνεται την σε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

β) Υπολογίστε τις συντεταγμένες του $v = \left(\sqrt{2}, 3, \sqrt{2}\right) \in \mathbb{R}^3$ ως προς τη βάση που βρήκατε στο (α) και γράψτε το ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης.

Άσκηση 16: Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω $\mathbb{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του V. Δείξτε ότι $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (v \cdot b_i)^2$, $\forall\, v \in V$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (ΕΜ 111)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ 8ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 1}}$

$$\|v\| = \sqrt{(v\cdot v)} = \sqrt{1^2+4^2+0^2+2^2} = \sqrt{21}$$

$$\|w\| = \sqrt{w\cdot w} = \sqrt{2^2+(-2)^2+3^2+1^2} = \sqrt{18}$$

$$v\cdot w = 1(2)+4(-2)+0(3)+2(1) = 2-8+2 = -4$$

$$\|v-w\| = \sqrt{(1-2)^2+(4+2)^2+(0-3)^2+(2-1)^2} = \sqrt{47}$$

$$\cos\theta = \frac{v\cdot w}{\|v\|\,\|w\|} \Rightarrow \cos\theta = \frac{-4}{\sqrt{21\cdot 18}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{-4}{3\sqrt{42}}\right) \Rightarrow \theta \simeq 1.778$$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 2}}$

Ανισότητα Schwarz : $|\alpha\cdot b| \leq \|\alpha\|\,\|b\| \Rightarrow \sqrt{xy}+\sqrt{yx} \leq$

$$\leq \sqrt{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2}\,\sqrt{(\sqrt{y})^2+(\sqrt{x})^2} \Rightarrow 2\sqrt{xy} \leq x+y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 3}}$

$\forall\, v\in N(A)$ έχουμε $Av=0 \Rightarrow A^TAv = A0 \Rightarrow (A^TA)v=0$

δηλ. $N(A)\subseteq N(A^TA)$ (1)

Αντίστροφα, $\forall\, w\in N(A^TA)$ έχουμε $A^TAw=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow w^T(A^TAw)=0 \Rightarrow (w^TA^T)(Aw)=0 \Rightarrow (Aw)^T(Aw)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Aw)\cdot(Aw)=0 \Rightarrow \|Aw\|^2=0 \Rightarrow Aw=0$$

δηλ. $N(A^TA)\subseteq N(A)$, οποία λόγω της εξίσωσης (1) συνεπάγεται ότι

$$N(A^TA)=N(A)$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Έστω $A=(\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $A^{-1}=(b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Εξ' ορισμού: $AA^{-1}=I \Rightarrow (AA^{-1})_{ij} = \delta_{ij} \Rightarrow$

στοιχείο του AA^{-1} στη θέση (i,j)

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} b_{kj} = \delta_{ij} \Rightarrow \alpha_{i1} b_{1j} + \alpha_{i2} b_{2j} + \ldots + \alpha_{in} b_{nj} = \delta_{ij} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \vdots \\ \alpha_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = \delta_{ij} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \vdots \\ \alpha_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = 0 \text{ για } i \neq j$$

δηλ. (i-γραμμή του A) $\perp$ (j-στήλη του A^{-1}) για $i \neq j$

ΑΣΚΗΣΗ 5

α) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = (u+v)\cdot(u+v) + (u-v)\cdot(u-v) =$

$= (u\cdot u) + 2(u\cdot v) + (v\cdot v) + (u\cdot u) - 2(u\cdot v) + (v\cdot v) =$

$= 2(u\cdot u) + 2(v\cdot v) = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right) \quad \forall\, u,v \in V$

β) $u \perp (v-w) \Rightarrow u\cdot(v-w)=0 \Rightarrow u\cdot v - u\cdot w \Rightarrow w\cdot u = v\cdot u \quad (1)$

$v \perp (w-u) \Rightarrow v\cdot(w-u)=0 \Rightarrow v\cdot w - v\cdot u \Rightarrow w\cdot v = v\cdot u \quad (2)$

Επομένως, $w\cdot(u-v) = w\cdot u - w\cdot v \underset{(1),(2)}{=} v\cdot u - v\cdot u = 0$

Άρα $w \perp (u-v)$

γ) $u\cdot\left[(u\cdot v)w - (u\cdot w)v\right] = (u\cdot v)(u\cdot w) - (u\cdot w)(u\cdot v) = (u\cdot w)(u\cdot v) - (u\cdot w)(u\cdot v) =$

$= 0$

δ) (i) $(u+\lambda v) \perp (\lambda u - v) \Rightarrow (u+\lambda v)\cdot(\lambda u - v) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

άρα ισχύει και για $\lambda = 0$. Επομένως: $u\cdot(-v) = 0 \Rightarrow -(u\cdot v) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow u\cdot v = 0 \Rightarrow u \perp v$

(ii) $(u+\lambda v)\cdot(\lambda u - v) = 0 \Rightarrow \lambda(u\cdot u) - \cancel{(u\cdot v)}^{\nearrow 0} + \lambda^2 \cancel{(v\cdot u)}^{\nearrow 0} - \lambda(v\cdot v) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda \|u\|^2 = \lambda \|v\|^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Άρα: $\|u\| = \|v\| = 1$

Οπότε $\|3u+4v\| = \sqrt{(3u+4v)\cdot(3u+4v)} =$

$$= \sqrt{9(u\cdot u) + 12(u\cdot v) + 12(v\cdot u) + 16(v\cdot v)} =$$

$$= \sqrt{9\|u\|^2 + 16\|v\|^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Έστω $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ και $w = (1, 1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$

Ανισότητα Schwarz : $|v\cdot w| \leq \|v\| \, \|w\| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + \dots + 1^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq \sqrt{n} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \leq n\,(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$

Επειδή: $\cos\theta = \dfrac{v\cdot w}{\|v\|\|w\|} \Rightarrow v\cdot w = \|v\|\|w\| \cos\theta \Rightarrow |v\cdot w| = \|v\|\|w\| \, |\cos\theta|$

η ισότητα ισχύει ανν $|\cos\theta| = 1$ ή $\|v\| = 0$ δηλ.

ανν $v = \lambda w$ με $\lambda \in \mathbb{R}$, δηλ. $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

ΑΣΚΗΣΗ 7

$P = \frac{1}{\|w\|^2} ww^T$. Άρα $P^T = \left(\frac{1}{\|w\|^2} ww^T\right) = \frac{1}{\|w\|^2} (ww^T)^T =$

$= \frac{1}{\|w\|^2} (w^T)^T w^T = \frac{1}{\|w\|^2} ww^T = P$ δηλ. $P^T = P$, άρα P συμμετρικός

Επίσης, $P^2 = \left(\frac{1}{\|w\|^2} ww^T\right)\left(\frac{1}{\|w\|^2} ww^T\right) = \frac{1}{\|w\|^4} w(w^Tw)w^T =$

$$= \frac{1}{\|w\|^4} w \|w\|^2 w^T = \frac{1}{\|w\|^2} ww^T = P$$

Τέλος, $tr(P) = tr\left(\frac{1}{\|w\|^2} ww^T\right) = \frac{1}{\|w\|^2} tr(ww^T)$

Όμως $(ww^T)_{ij} = w_i w_j$. Άρα: $tr(ww^T) = \sum_{i=1}^{n} (ww^T)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} w_i w_i =$

$$= w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_n^2 = \|w\|^2$$

όπου $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$

Άρα: $tr(P) = \frac{1}{\|w\|^2} \|w\|^2 = 1$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Ο ζητούμενος πίνακας P είναι $P = \frac{1}{\|w\|^2} ww^T$, όπου w ένα οποιοδήποτε μη-μηδενικό σημείο της ευθείας $4x+3y=0$. Έστω για παράδειγμα $w = \left(1, -\frac{4}{3}\right)$. Άρα:

$$P = \frac{1}{1^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4/3 \end{bmatrix} = \frac{9}{25} \begin{bmatrix} 1 & -4/3 \\ -4/3 & 16/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/25 & -12/25 \\ -12/25 & 16/25 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

α) $P = \frac{1}{\|w\|^2} ww^T = \frac{1}{1^2+3^2+(-1)^2+4^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} =$

$$= \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 9 & -3 & 12 \\ -1 & -3 & 1 & -4 \\ 4 & 12 & -4 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/27 & 1/9 & -1/27 & 4/27 \\ 1/9 & 1/3 & -1/9 & 4/9 \\ -1/27 & -1/9 & 1/27 & -4/27 \\ 4/27 & 4/9 & -4/27 & 16/27 \end{bmatrix}$$

β) $Px = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\|w\|^2} w(w^T x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\|w\|^2} w\,(w \cdot x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w \cdot x = 0$ δηλ. ο μηδενόχωρος του P αποτελείται από όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$ που είναι κάθετα στο w. Επομένως,

$$w \cdot x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -3x_2 + x_3 - 4x_4$$

Άρα: $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_2+x_3-4x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Δηλ. $\{\text{Βάση του } N(P)\} = \{(-3,1,0,0),\ (1,0,1,0),\ (-4,0,0,1)\}$

γ) Δηλ. $Pv = 0$, άρα $v \in N(P)$. Επομένως, κάθε διάνυσμα της μορφής (1) έχει μηδενική προβολή στο w. Π.χ. για $x_2 = x_3 = x_4 = 1$ παίρνουμε:

$$v = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

α) $[v - pr_w(v)] \cdot w = v \cdot w - pr_w(v) \cdot w = v \cdot w - \left(\frac{v \cdot w}{\|w\|^2} w\right) \cdot w =$

$= v \cdot w - \frac{v \cdot w}{\|w\|^2}(w \cdot w) = v \cdot w - \frac{v \cdot w}{\cancel{\|w\|^2}} \cancel{\|w\|^2} = 0$

Άρα $[v - pr_w(v)] \perp w$

β) $b \cdot w_1 = v \cdot w_1 - pr_{w_1}(v) \cdot w_1 - pr_{w_2}(v) \cdot w_1 - \ldots - pr_{w_k}(v) \cdot w_1$

$\forall\ i \neq j$ έχουμε: $pr_{w_i}(v) \cdot w_j = \left(\frac{v \cdot w_i}{\|w_i\|^2} w_i\right) \cdot w_j = \frac{v \cdot w_i}{\|w_i\|^2} w_i \cdot w_j = 0$

μιας και $w_i \perp w_j$

Επίσης, $\forall\ i = 1, 2, \ldots, k$ έχουμε: $pr_{w_i}(v) \cdot w_i = \frac{v \cdot w_i}{\|w_i\|^2}(w_i \cdot w_i) = \frac{v \cdot w_i}{\|w_i\|^2} \|w_i\|^2 =$

$= v \cdot w_i$

Άρα $b \cdot w_1 = v \cdot w_1 - v \cdot w_1 = 0$

$b \cdot w_2 = v \cdot w_2 - v \cdot w_2 = 0$

$\vdots$

$b \cdot w_k = v \cdot w_k - v \cdot w_k = 0$

δηλ. το b είναι κάθετο σε όλα τα $w_1, w_2, \ldots, w_k$.

ΑΣΚΗΣΗ 11

Αν $v \in U \cap W$ τότε $v \in U$ και $v \in W$. Άρα $v \perp v \Rightarrow$

$\Rightarrow v \cdot v = 0 \Leftrightarrow \|v\|^2 = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Άρα $U \cap W = \{0\}$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Ορθογώνιο συμπλήρωμα του W: $W^{\perp} = \{ v \in V \mid v \cdot w = 0, \forall w \in W \}$

$\forall v_1, v_2 \in W^{\perp}$ έχουμε: $(v_1 + v_2) \cdot w = v_1 \cdot w + v_2 \cdot w =$

$= 0 + 0 = 0$, δηλ. $(v_1 + v_2) \in W^{\perp}$

Επίσης, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ και $\forall v \in W^{\perp}$ έχουμε: $(\lambda v) \cdot w = \lambda (v \cdot w) = \lambda 0 = 0$

δηλ. $\lambda v \in W^{\perp}$

Άρα, το σύνολο $W^{\perp}$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και κλειστό ως προς τον πολλαπλ/σμό με πραγματικό αριθμό. Επομένως είναι διανυσματικός υπόχωρος του V.

ΑΣΚΗΣΗ 13

α) Τα $w_1, w_2, \ldots, w_k$ είναι αμοιβαίως ορθογώνια. Το ίδιο ισχύει και για τα $w_1', w_2', \ldots, w_\ell'$. Επίσης, εξ' ορισμού του $W^{\perp}$ έχουμε ότι $w_i \perp w_j'$ $\forall i = 1, 2, \ldots, k$ και $j = 1, 2, \ldots, \ell$. Άρα, τα μοναδιαία (και άρα μη-μηδενικά) διανύσματα $w_1, w_2, \ldots, w_k, w_1', w_2', \ldots, w_\ell'$ είναι αμοιβαίως ορθογώνια, και ως εκ τούτου, γρ. ανεξάρτητα. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι παράγουν τον V.

$\forall v \in V$, το διάνυσμα $b = v - pr_{w_1}(v) - pr_{w_2}(v) - \ldots - pr_{w_k}(v)$ είναι κάθετο σε όλα τα $w_1, w_2, \ldots, w_k$. Άρα, είναι κάθετο και σε κάθε γραμμ. συνδυασμό τους, δηλ. κάθετο σε κάθε $w \in W$. Άρα, $b \in W^{\perp}$ και επομένως: $b = \lambda_1 w_1' + \lambda_2 w_2' + \ldots + \lambda_\ell w_\ell'$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow v = pr_{w_1}(v) + pr_{w_2}(v) + \ldots + pr_{w_k}(v) + \lambda_1 w_1' + \lambda_2 w_2' + \ldots + \lambda_\ell w_\ell'$

$$\Rightarrow v = \left(\frac{v \cdot w_1}{\|w_1\|^2}\right) w_1 + \left(\frac{v \cdot w_2}{\|w_2\|^2}\right) w_2 + \ldots + \left(\frac{v \cdot w_k}{\|w_k\|^2}\right) w_k + \lambda_1 w_1' + \lambda_2 w_2' + \ldots + \lambda_\ell w_\ell'$$

Άρα, κάθε $v \in V$ γράφεται ως γρ. συνδυασμός των $w_1, w_2, \ldots, w_k, w_1', w_2', \ldots, w_\ell'$ και συνεπώς, τα $w_1, w_2, \ldots, w_k, w_1', w_2', \ldots, w_\ell'$ παράγουν τον V.

β) $\forall\, v \in W \cap W^{\perp}$ έχουμε $v \in W$ και $v \in W^{\perp}$. Άρα $v \perp v \Rightarrow$

$\Rightarrow v \cdot v = 0 \Rightarrow \|v\|^2 = 0 \Rightarrow v = 0$

Άρα $W \cap W^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow W + W^{\perp} = W \oplus W^{\perp}$

Επίσης, $\dim(W \oplus W^{\perp}) = \dim W + \dim W^{\perp} = k + \ell = \dim V$

και επειδή $W \oplus W^{\perp}$ υπόχωρος του V, συνεπάγεται ότι

$W \oplus W^{\perp} = V$

γ) Τα $w_{k+1}, w_{k+2}, \dots, w_n$ είναι κάθετα σε όλα τα $w_1, w_2, \dots, w_k$. Άρα είναι κάθετα και σε κάθε γρ. συνδυασμό τους, δηλ. κάθετα σε κάθε $w \in W$. Επομένως, $\{w_{k+1}, w_{k+2}, \dots, w_n\} \in W^{\perp}$

Επιπλέον, $w_{k+1}, w_{k+2}, \dots, w_n$ είναι γρ. ανεξάρτητα διανύσματα (ως στοιχεία βάσης του V) πλήθους $n-k = \dim W^{\perp}$. Άρα, αποτελούν βάση του $W^{\perp}$.

δ) Έστω $\{w_1', w_2', \dots, w_\ell'\}$ ορθοκανονική βάση του $W^{\perp}$. Από το ερώτημα (α) έχουμε ότι το $\{w_1', w_2', \dots, w_\ell', w_1, w_2, \dots, w_k\}$ είναι ορθοκανονική βάση του V, δηλ. έχουμε επεκτείνει την ορθοκανονική βάση του $W^{\perp}$ σε ορθοκανονική βάση του V, άρα λόγω της πρότασης (γ), το $\{w_1, w_2, \dots w_k\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $(W^{\perp})^{\perp}$. Συνεπώς, $W = (W^{\perp})^{\perp}$

ΑΣΚΗΣΗ 14

α) Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ δηλ. $R(A^T) = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Άρα $r(A) = 3 \Rightarrow \dim R(A^T) = 3$ δηλ. v_1, v_2, v_3 γρ. ανεξάρτητα

Άρα v_1, v_2, v_3 βάση του $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt, οπότε έχουμε:

$$W_1 = V_1 = (1,1,0,0)$$

$$W_2 = V_2 - pr_{W_1}(V_2) = V_2 - \frac{V_2 \cdot W_1}{\|W_1\|^2} W_1 = (0,0,1,1) - \frac{0}{1^2+1^2}(1,1,0,0) = (0,0,1,1)$$

$$W_3 = V_3 - pr_{W_1}(V_3) - pr_{W_2}(V_3) = V_3 - \frac{V_3 \cdot W_1}{\|W_1\|^2} W_1 - \frac{V_3 \cdot W_2}{\|W_2\|^2} W_2 =$$

$$= (1,0,-1,0) - \frac{1}{1^2+1^2}(1,1,0,0) - \frac{(-1)}{1^2+1^2}(0,0,1,1) =$$

$$= (1,0,-1,0) - \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0\right) + \left(0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Άρα $\{$ορθογώνια βάση του $\langle V_1,V_2,V_3\rangle\} = \{W_1, W_2, W_3\} =$

$$= \left\{(1,1,0,0), (0,0,1,1), \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$$

Επιπλέον, $\|W_1\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\|W_2\| = \sqrt{2}$, $\|W_3\| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = 1$

Άρα, $\{$ορθοκανονική βάση του $\langle V_1,V_2,V_3\rangle\} = \left\{\frac{W_1}{\|W_1\|}, \frac{W_2}{\|W_2\|}, \frac{W_3}{\|W_3\|}\right\} =$

$$= \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \left(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$$

β) $R(A^T) = \langle V_1,V_2,V_3\rangle \Rightarrow \langle V_1,V_2,V_3\rangle^{\perp} = N(A)$

$$AX=0 \Leftrightarrow UX=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} X_3+X_4=0 \Rightarrow X_3=-X_4 \\ -X_2-X_3=0 \Rightarrow X_2=X_4 \\ X_1+X_2=0 \Rightarrow X_1=-X_4 \end{cases}$$

Άρα $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = X_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ με $X_4 \in \mathbb{R}$

Άρα $\{$βάση του $N(A)\} = \{(-1,1,-1,1)\} \Rightarrow \{$ορθοκανον. βάση του $N(A)\} =$

$$= \left\{\frac{1}{\sqrt{4}}(-1,1,-1,1)\right\} = \left\{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$$

γ) Αν επεκτείνουμε την ορθοκανονική βάση του $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ χρησιμοποιώντας το διάνυσμα της ορθοκανονικής βάσης του $\langle v_1, v_2, v_3\rangle^{\perp}$ παίρνουμε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^4$ (βλ. Άσκηση 13(α)).

Άρα: $b_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, $b_4 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

και $\mathbb{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^4$

Αν $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ οι συντ/νες του $v = (-4, 15, 7, 8)$ ως προς την $\mathbb{B}$, τότε: $\lambda_1 = v \cdot b_1 = -\frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{15}{\sqrt{2}} = \frac{11}{\sqrt{2}}$,

$\lambda_2 = v \cdot b_2 = \frac{7}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{15}{\sqrt{2}}$, $\lambda_3 = v \cdot b_3 = -2 - \frac{15}{2} - \frac{7}{2} + 4 = -9$

$\lambda_4 = v \cdot b_4 = 2 + \frac{15}{2} - \frac{7}{2} + \frac{8}{2} = 10$

Άρα: $v = \underbrace{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3}_{u} + \underbrace{\lambda_4 b_4}_{w} \Rightarrow$

$$\Rightarrow v = \frac{11}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{15}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + (-9) \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + 10 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix}}_{u} + \underbrace{\begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}}_{w}$$

ΑΣΚΗΣΗ 15

α) Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ δηλ. $V = \langle v_1, v_2 \rangle = R(A^T)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = U$$

Άρα $r(A) = 2 \Rightarrow \dim R(A^T) = 2 = m$ δηλ. v_1, v_2 γρ. ανεξάρτητα και άρα $\{v_1, v_2\}$ βάση του V

Επίσης, $v_1 \cdot v_2 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = 0$

Άρα $\{v_1, v_2\}$ ορθογώνια βάση του V

και $\left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) \right\} =$

$= \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$ ορθοκανονική βάση του V

Επειδή $V = R(A^T)$, αρκεί να βρούμε μια ορθοκανονική βάση του $V^\perp = N(A)$ για να επεκτείνουμε την παραπάνω ορθοκανονική βάση του V.

$$Ax = 0 \Leftrightarrow Ux = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \end{cases}$$

Άρα $(x_1, x_2, x_3) = x_2 (0, 1, 0)$ με $x_2 \in \mathbb{R}$

Επομένως $\{(0,1,0)\}$ βάση του $N(A) = V^\perp$ και μάλιστα ορθοκανονική αφού $\|(0,1,0)\| = 1$

Άρα: $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0,1,0) \right\}$ ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$

β) Αν $b_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 1/\sqrt{2}\right)$, $b_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $b_3 = (0,1,0)$

Τότε $v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$ με $\lambda_1 = v \cdot b_1 = 2$,

$\lambda_2 = v \cdot b_2 = 0$, $\lambda_3 = v \cdot b_3 = 3$

Άρα οι συντ/μένες του v ως προς την ορθοκανονική βάση $\{b_1, b_2, b_3\}$ είναι $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (2, 0, 3)$

Συνεπώς $v = 2b_1 + 0b_2 + 3b_3 \Rightarrow v = 2b_1 + 3b_3$

ΑΣΚΗΣΗ 16

$\forall\ v \in V$ έχουμε: $v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n$ με $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

Άρα $\|v\|^2 = v \cdot v = (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n) \cdot (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n)$

Όμως $b_i \cdot b_i = \|b_i\|^2 = 1 \quad \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$

ενώ $b_i \cdot b_j = 0 \quad \forall\ i \neq j$

Άρα $\|v\|^2 = \lambda_1^2 (b_1 \cdot b_1) + \lambda_2^2 (b_2 \cdot b_2) + \ldots + \lambda_n^2 (b_n \cdot b_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \|v\|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 \Rightarrow \|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \qquad (1)$

Όμως: $v \cdot b_1 = (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n) \cdot b_1 \Rightarrow v \cdot b_1 = \lambda_1$

Ομοίως $v \cdot b_i = \lambda_i \quad \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$

Άρα η (1) γίνεται: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (v \cdot b_i)^2$