ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Γραμμική Άλγεβρα & Αναλυτική Γεωμετρία» (ΕΜ111) – Χειμερινό Εξάμηνο 2008-2009
Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

8^Ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Βρείτε τα μήκη και το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{v}=(1,4,0,2)$ και $\vec{w}=(2,-2,3,1)$, καθώς και τη μεταξύ τους απόσταση και γωνία.

Άσκηση 2: Έστω $\vec{b}=\left(\sqrt{x},\sqrt{y}\right)$ και $\vec{a}=\left(\sqrt{y},\sqrt{x}\right)$, όπου *x*, *y* θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Εφαρμόστε την ανισότητα του Schwarz και συγκρίνατε τον αριθμητικό μέσο $(x+y)/2$ με το γεωμετρικό μέσο $\sqrt{xy}$.

Άσκηση 3: Δείξτε ότι ο πίνακας $A^T A$ έχει τον ίδιο μηδενόχωρο με τον $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

Άσκηση 4: Αποδείξτε ότι η *i*-γραμμή ενός αντιστρέψιμου πίνακα είναι ορθογώνια στην *j*-στήλη του αντιστρόφου του, για κάθε $i\neq j$.

Άσκηση 5: Έστω *V* ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αποδείξτε ότι:

α) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\right)$, $\forall\,\vec{u},\vec{v}\in V$

β) Αν $\vec{u}\perp(\vec{v}-\vec{w})$ και $\vec{v}\perp(\vec{w}-\vec{u})$, τότε $\vec{w}\perp(\vec{u}-\vec{v})$, $\forall\,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$

γ) $\vec{u}\perp\left[(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}-(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}\right]$, $\forall\,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$

δ) Αν τα διανύσματα $(\vec{u}+\lambda\vec{v})$, $(\lambda\vec{u}-\vec{v})$ είναι κάθετα $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}$, τότε: (i) $\vec{u}\perp\vec{v}$, και (ii) αν $\|\vec{v}\|=1$, τότε $\|3\vec{u}+4\vec{v}\|=5$.

Άσκηση 6: Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Schwarz, αποδείξτε ότι $\left(x_1+\cdots+x_n\right)^2\leq n\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)$, για $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Άσκηση 7: Δείξτε ότι ο πίνακας προβολής *P* που προβάλλει κάθε διάνυσμα $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ στη διεύθυνση ενός διανύσματος $\vec{w}\in\mathbb{R}^n$ είναι συμμετρικός, ικανοποιεί τη σχέση $P^2=P$ και έχει ίχνος ίσο με 1.

Άσκηση 8: Βρείτε τον πίνακα προβολής που προβάλλει κάθε διάνυσμα του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ πάνω στην ευθεία $4x+3y=0$.

Άσκηση 9: Έστω $\vec{w}=(1,3,-1,4)$. α) Βρείτε τον πίνακα προβολής *P* στο διάνυσμα $\vec{w}$, β) Βρείτε μια βάση του μηδενόχωρου του *P*, γ) Βρείτε ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{v}\in\mathbb{R}^4$ του οποίου η προβολή στο $\vec{w}$ να είναι το μηδενικό διάνυσμα.

Άσκηση 10: Έστω *V* ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αποδείξτε ότι:

α) $[\vec{v}-pr_{\vec{w}}(\vec{v})]\perp\vec{w}$, $\forall\,\vec{v},\vec{w}\in V$ με $\vec{w}\neq\vec{0}$.

β) Για κάθε διάνυσμα $\vec{v}\in V$ και $\vec{w}_1,\vec{w}_2,\ldots,\vec{w}_k\in V$ μη-μηδενικά αμοιβαίως ορθογώνια διανύσματα, το διάνυσμα $\vec{b}=\vec{v}-pr_{\vec{w}_1}(\vec{v})-pr_{\vec{w}_2}(\vec{v})-\cdots-pr_{\vec{w}_k}(\vec{v})$ είναι κάθετο σε όλα τα $\vec{w}_1,\vec{w}_2,\ldots,\vec{w}_k$.

Άσκηση 11: Έστω *V* ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και *U*, *W* ορθογώνιοι υπόχωροι του (δηλ. $U\perp W$). Δείξτε ότι $U\cap W=\left\{\vec{0}\right\}$.

Άσκηση 12: Έστω *V* ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και *W* ένας υπόχωρος του. Δείξτε ότι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του *W* είναι επίσης διανυσματικός υπόχωρος του *V*.

Άσκηση 13: Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\dim V = n$. Αν $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_k\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση ενός υποχώρου W του V, τότε δείξτε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

α) Αν $\{\vec{w}'_1, \vec{w}'_2, ..., \vec{w}'_\ell\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $W^\perp$ τότε το $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_k, \vec{w}'_1, \vec{w}'_2, ..., \vec{w}'_\ell\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του V.

β) $W + W^\perp = W \oplus W^\perp = V$

γ) Αν επεκτείνουμε την ορθοκανονική βάση $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_k\}$ του W σε ορθοκανονική βάση $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_k, \vec{w}_{k+1}, \vec{w}_{k+2}, ..., \vec{w}_n\}$ του V τότε το $\{\vec{w}_{k+1}, \vec{w}_{k+2}, ..., \vec{w}_n\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του $W^\perp$.

δ) $(W^\perp)^\perp = W$

Άσκηση 14: Έστω τα διανύσματα $\vec{v}_1 = (1,1,0,0)$, $\vec{v}_2 = (0,0,1,1)$, $\vec{v}_3 = (1,0,-1,0)$ του Ευκλείδιου χώρου $\mathbb{R}^4$.

α) Βρείτε μια ορθοκανονική βάση του $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$.

β) Βρείτε μια ορθοκανονική βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος του $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$.

γ) Γράψτε το διάνυσμα $\vec{v} = (-4,15,7,8)$ ως άθροισμα $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, όπου $\vec{u} \in \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$ και $\vec{w} \in \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle^\perp$.

Άσκηση 15: Έστω τα διανύσματα $\vec{v}_1 = (1,0,1)$, $\vec{v}_2 = (1,0,-1)$, του Ευκλείδιου χώρου $\mathbb{R}^3$ και $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$.

α) Βρείτε μια ορθοκανονική βάση του V και επεκτείνεται την σε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

β) Υπολογίστε τις συντεταγμένες του $\vec{v} = \left(\sqrt{2}, 3, \sqrt{2}\right) \in \mathbb{R}^3$ ως προς τη βάση που βρήκατε στο (α) και γράψτε το ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης.

Άσκηση 16: Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω $\mathbb{B} = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\right\}$ μια ορθοκανονική βάση του V. Δείξτε ότι $\|\vec{v}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\vec{v} \cdot \vec{b}_i)^2$, $\forall\, \vec{v} \in V$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ & ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (ΕΜ-111)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ 8ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{1^2+4^2+0^2+2^2} = \sqrt{21}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{\vec{w}\cdot\vec{w}} = \sqrt{2^2+(-2)^2+3^2+1^2} = \sqrt{18}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = 1(2)+4(-2)+0(3)+2(1) = 2-8+2 = -4$$

$$\|\vec{v}-\vec{w}\| = \sqrt{(1-2)^2+(4+2)^2+(0-3)^2+(2-1)^2} = \sqrt{47}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|} \Rightarrow \cos\theta = \frac{-4}{\sqrt{21\cdot 18}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{-4}{3\sqrt{42}}\right) \Rightarrow \theta \simeq 1.778$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ανισότητα Schwarz : $|\vec{\alpha}\cdot\vec{b}| \le \|\vec{\alpha}\|\,\|\vec{b}\| \Rightarrow \sqrt{xy}+\sqrt{yx} \le$

$$\le \sqrt{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2}\,\sqrt{(\sqrt{y})^2+(\sqrt{x})^2} \Rightarrow 2\sqrt{xy} \le x+y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

$\forall\ \vec{v}\in N(A)$ έχουμε $A\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow A^TA\vec{v}=A^T\vec{0} \Rightarrow (A^TA)\vec{v}=\vec{0}$

δηλ. $\forall\ \vec{v}\in N(A)$ έχουμε και $\vec{v}\in N(A^TA)$. Άρα, $N(A)\subseteq N(A^TA)$ (1)

Αντίστροφα, $\forall\ \vec{w}\in N(A^TA)$ έχουμε $A^TA\vec{w}=\vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{w}^T(A^TA\vec{w})=0 \Rightarrow (\vec{w}^TA^T)(A\vec{w})=0 \Rightarrow (A\vec{w})^T(A\vec{w})=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (A\vec{w})\cdot(A\vec{w})=0 \Rightarrow \|A\vec{w}\|^2=0 \Rightarrow A\vec{w}=\vec{0}$

δηλ. $\forall\ \vec{w}\in N(A^TA)$ έχουμε και $\vec{w}\in N(A)$. Άρα, $N(A^TA)\subseteq N(A)$

η οποία, λόγω της σχέσης (1), συνεπάγεται ότι $N(A^TA)=N(A)$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Έστω $A=(\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $A^{-1}=(b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Εξ' ορισμού: $AA^{-1}=I \Rightarrow (AA^{-1})_{ij} = \delta_{ij} \Rightarrow$

στοιχείο του AA^{-1} στη θέση (i,j)

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} b_{kj} = \delta_{ij} \Rightarrow \alpha_{i1}b_{1j} + \alpha_{i2}b_{2j} + \ldots + \alpha_{in}b_{nj} = \delta_{ij} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \vdots \\ \alpha_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = \delta_{ij} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \vdots \\ \alpha_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{για } i \neq j$$

δηλ. (i-γραμμή του A) $\perp$ (j-στήλη του A^{-1}) για $i\neq j$

ΑΣΚΗΣΗ 5

α) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) + (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) =$

$= (\vec{u}\cdot\vec{u}) + 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) + (\vec{v}\cdot\vec{v}) + (\vec{u}\cdot\vec{u}) - 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) + (\vec{v}\cdot\vec{v}) =$

$= 2(\vec{u}\cdot\vec{u}) + 2(\vec{v}\cdot\vec{v}) = 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right), \qquad \forall\, \vec{u},\vec{v} \in V$

β) $\vec{u} \perp (\vec{v}-\vec{w}) \Rightarrow \vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{w}) = 0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\vec{w} = 0 \Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{u} = \vec{v}\cdot\vec{u} \quad (1)$

$\vec{v} \perp (\vec{w}-\vec{u}) \Rightarrow \vec{v}\cdot(\vec{w}-\vec{u}) = 0 \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{w} - \vec{v}\cdot\vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u} \quad (2)$

Επομένως, $\vec{w}\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{w}\cdot\vec{u} - \vec{w}\cdot\vec{v} \underset{(1),(2)}{=} \vec{v}\cdot\vec{u} - \vec{v}\cdot\vec{u} = 0$

Άρα $\vec{w} \perp (\vec{u}-\vec{v})$

γ) $\vec{u}\cdot\left[(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w} - (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}\right] = (\vec{u}\cdot\vec{v})(\vec{u}\cdot\vec{w}) - (\vec{u}\cdot\vec{w})(\vec{u}\cdot\vec{v}) =$

$= (\vec{u}\cdot\vec{w})(\vec{u}\cdot\vec{v}) - (\vec{u}\cdot\vec{w})(\vec{u}\cdot\vec{v}) = 0$

δ) (i) $(\vec{u}+\lambda\vec{v})\perp(\lambda\vec{u}-\vec{v}) \Rightarrow (\vec{u}+\lambda\vec{v})\cdot(\lambda\vec{u}-\vec{v})=0, \quad \forall \lambda\in\mathbb{R}$

άρα ισχύει και για $\lambda=0$. Επομένως: $\vec{u}\cdot(-\vec{v})=0 \Rightarrow -(\vec{u}\cdot\vec{v})=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

(ii) $(\vec{u}+\lambda\vec{v})\cdot(\lambda\vec{u}-\vec{v})=0 \Rightarrow \lambda(\vec{u}\cdot\vec{u})-\cancelto{0}{(\vec{u}\cdot\vec{v})}+\lambda^2\cancelto{0}{(\vec{v}\cdot\vec{u})}-\lambda(\vec{v}\cdot\vec{v})=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda\|\vec{u}\|^2=\lambda\|\vec{v}\|^2, \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$. Άρα: $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=1$

Οπότε $\|3\vec{u}+4\vec{v}\|=\sqrt{(3\vec{u}+4\vec{v})\cdot(3\vec{u}+4\vec{v})}=$

$$=\sqrt{9(\vec{u}\cdot\vec{u})+12(\vec{u}\cdot\vec{v})+12(\vec{v}\cdot\vec{u})+16(\vec{v}\cdot\vec{v})}=$$

$$=\sqrt{9\|\vec{u}\|^2+16\|\vec{v}\|^2}=\sqrt{9+16}=5$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Έστω $\vec{V}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $\vec{W}=(1,1,1,\ldots,1)\in\mathbb{R}^n$

Ανισότητα Schwarz: $|\vec{v}\cdot\vec{w}|\le\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x_1+x_2+\ldots+x_n|\le\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\ \sqrt{1^2+1^2+\ldots+1^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x_1+x_2+\ldots+x_n|\le\sqrt{n}\ \sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2+\ldots+x_n)^2\le n\,(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)$

Επειδή: $\cos\theta=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|} \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{w}=\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|\cos\theta \Rightarrow |\vec{v}\cdot\vec{w}|=\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|\,|\cos\theta|$

η ισότητα στη σχέση $|\vec{v}\cdot\vec{w}|\le\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|$ ισχύει ανν $|\cos\theta|=1$ ή $\|\vec{v}\|=0$

δηλ. ανν $\vec{v}=\lambda\vec{w}$ με $\lambda\in\mathbb{R}$, δηλ. $x_1=x_2=\ldots=x_n$

ΑΣΚΗΣΗ 7

$$P = \frac{1}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w}\vec{w}^T.$$ Άρα $$P^T = \left(\frac{1}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w}\vec{w}^T\right)^T = \frac{1}{\|\vec{w}\|^2}\left(\vec{w}\vec{w}^T\right)^T =$$

$$= \frac{1}{\|\vec{w}\|^2}\left(\vec{w}^T\right)^T\vec{w}^T = \frac{1}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w}\vec{w}^T = P$$ άρα $P^T = P$, δηλ. P συμμετρικός

Επίσης, $$P^2 = PP = \left(\frac{1}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w}\vec{w}^T\right)\left(\frac{1}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w}\vec{w}^T\right) = \frac{1}{\|\vec{w}\|^4}\vec{w}\left(\vec{w}^T\vec{w}\right)\vec{w}^T =$$

$$= \frac{1}{\|\vec{w}\|^4}\vec{w}\left(\vec{w}\cdot\vec{w}\right)\vec{w}^T = \frac{1}{\|\vec{w}\|^4}\vec{w}\|\vec{w}\|^2\vec{w}^T = \frac{1}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w}\vec{w}^T = P$$

Τέλος, $$\mathrm{tr}(P) = \mathrm{tr}\left(\frac{1}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w}\vec{w}^T\right) = \frac{1}{\|\vec{w}\|^2}\mathrm{tr}\left(\vec{w}\vec{w}^T\right)$$

Όμως $$\vec{w}\vec{w}^T = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1^2 & w_1w_2 & \cdots & w_1w_n \\ w_2w_1 & w_2^2 & \cdots & w_2w_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_1w_n & w_2w_n & \cdots & w_n^2 \end{bmatrix}$$

Άρα: $$\mathrm{tr}\left(\vec{w}\vec{w}^T\right) = w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_n^2 = \|\vec{w}\|^2$$

Επομένως, $$\mathrm{tr}(P) = \frac{1}{\|\vec{w}\|^2}\|\vec{w}\|^2 = 1$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Ο ζητούμενος πίνακας P είναι $P = \frac{1}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w}\vec{w}^T$, όπου $\vec{w}$ ένα οποιοδήποτε μη-μηδενικό σημείο της ευθείας $4x+3y=0$. Έστω για παράδειγμα $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4/3 \end{bmatrix}$. Άρα:

$$P = \frac{1}{1^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}\begin{bmatrix} 1 \\ -4/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4/3 \end{bmatrix} = \frac{9}{25}\begin{bmatrix} 1 & -4/3 \\ -4/3 & 16/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/25 & -12/25 \\ -12/25 & 16/25 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

α) $$P = \frac{1}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w}\vec{w}^T = \frac{1}{1^2+3^2+(-1)^2+4^2}\begin{bmatrix}1\\3\\-1\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & -1 & 4\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27}\begin{bmatrix}1 & 3 & -1 & 4\\3 & 9 & -3 & 12\\-1 & -3 & 1 & -4\\4 & 12 & -4 & 16\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/27 & 1/9 & -1/27 & 4/27\\1/9 & 1/3 & -1/9 & 4/9\\-1/27 & -1/9 & 1/27 & -4/27\\4/27 & 4/9 & -4/27 & 16/27\end{bmatrix}$$

β) $$P\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{1}{\|\vec{w}\|}\vec{w}\left(\vec{w}^T\vec{x}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{1}{\|\vec{w}\|}\vec{w}\left(\vec{w}\cdot\vec{x}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \vec{w}\cdot\vec{x} = \vec{0}$ δηλ. ο μηδενόχωρος του P αποτελείται από όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$ που είναι κάθετα στο $\vec{w}$. Επομένως,

$$\vec{w}\cdot\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1\\3\\-1\\4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1+3x_2-x_3+4x_4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -3x_2+x_3-4x_4$$

Άρα: $$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3x_2+x_3-4x_4\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix}-4\\0\\0\\1\end{bmatrix} \quad (1)$$

Δηλ. $\{$Βάση του $N(P)\} = \{(-3,1,0,0),\ (1,0,1,0),\ (-4,0,0,1)\}$

γ) Δηλ. $P\vec{v} = \vec{0}$, άρα $\vec{v} \in N(P)$. Επομένως, κάθε διάνυσμα της μορφής (1) έχει μηδενική προβολή στο $\vec{w}$. Π.χ. για $x_2=x_3=x_4=1$ παίρνουμε:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix}-6\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

α) $\left[\vec{v}-\mathrm{pr}_{\vec{w}}(\vec{v})\right]\cdot\vec{w}=\vec{v}\cdot\vec{w}-\mathrm{pr}_{\vec{w}}(\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{v}\cdot\vec{w}-\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w}\right)\cdot\vec{w}=$

$$=\vec{v}\cdot\vec{w}-\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}(\vec{w}\cdot\vec{w})=\vec{v}\cdot\vec{w}-\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\cancel{\|\vec{w}\|^2}}\cancel{\|\vec{w}\|^2}=0$$

Άρα $\left[\vec{v}-\mathrm{pr}_{\vec{w}}(\vec{v})\right]\perp\vec{w}$

β) $\vec{b}\cdot\vec{w}_1=\vec{v}\cdot\vec{w}_1-\mathrm{pr}_{\vec{w}_1}(\vec{v})\cdot\vec{w}_1-\mathrm{pr}_{\vec{w}_2}(\vec{v})\cdot\vec{w}_1-\cdots-\mathrm{pr}_{\vec{w}_k}(\vec{v})\cdot\vec{w}_1$

$\forall\ i\neq j$ έχουμε: $\mathrm{pr}_{\vec{w}_i}(\vec{v})\cdot\vec{w}_j=\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}_i}{\|\vec{w}_i\|^2}\vec{w}_i\right)\cdot\vec{w}_j=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}_i}{\|\vec{w}_i\|^2}(\vec{w}_i\cdot\vec{w}_j)=0$

μιας και $\vec{w}_i\perp\vec{w}_j$

Επίσης, $\forall\ i=1,2,\dots,k$ έχουμε: $\mathrm{pr}_{\vec{w}_i}(\vec{v})\cdot\vec{w}_i=\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}_i}{\|\vec{w}_i\|^2}\vec{w}_i\right)\cdot\vec{w}_i=$

$$=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}_i}{\|\vec{w}_i\|^2}(\vec{w}_i\cdot\vec{w}_i)=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}_i}{\|\vec{w}_i\|^2}\|\vec{w}_i\|^2=\vec{v}\cdot\vec{w}_i$$

Άρα
$$\begin{aligned}\vec{b}\cdot\vec{w}_1&=\vec{v}\cdot\vec{w}_1-\vec{v}\cdot\vec{w}_1=0\\ \vec{b}\cdot\vec{w}_2&=\vec{v}\cdot\vec{w}_2-\vec{v}\cdot\vec{w}_2=0\\ &\vdots\\ \vec{b}\cdot\vec{w}_k&=\vec{v}\cdot\vec{w}_k-\vec{v}\cdot\vec{w}_k=0\end{aligned}$$

δηλ. το $\vec{b}$ είναι κάθετο σε όλα τα $\vec{w}_1,\vec{w}_2,\dots,\vec{w}_k$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Αν $\vec{v}\in(U\cap W)$ τότε $\vec{v}\in U$ και $\vec{v}\in W$. Άρα $\vec{v}\perp\vec{v}\Rightarrow$

$\Rightarrow\ \vec{v}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow\|\vec{v}\|^2=0\Leftrightarrow\vec{v}=\vec{0}$

Άρα $U\cap W=\{\vec{0}\}$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Ορθογώνιο συμπλήρωμα του W: $W^{\perp} = \{\vec{v} \in V \setminus \vec{v} \cdot \vec{w} = 0, \forall \vec{w} \in W\}$

$\forall\ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in W^{\perp}$ έχουμε: $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot \vec{w} = \vec{v}_1 \cdot \vec{w} + \vec{v}_2 \cdot \vec{w} =$

$= 0 + 0 = 0$, δηλ. $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \in W^{\perp}$

Επίσης, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ και $\forall \vec{v} \in W^{\perp}$ έχουμε: $(\lambda \vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda (\vec{v} \cdot \vec{w}) = \lambda 0 = 0$

δηλ. $\lambda \vec{v} \in W^{\perp}$

Άρα, το σύνολο $W^{\perp}$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και κλειστό ως προς τον πολλαπλ/σμό με πραγματικό αριθμό. Επομένως είναι διανυσματικός υπόχωρος του V.

ΑΣΚΗΣΗ 13

α) Τα $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k$ είναι αμοιβαίως ορθογώνια. Το ίδιο ισχύει και για τα $\vec{w}_1', \vec{w}_2', \ldots, \vec{w}_\ell'$. Επίσης, εξ' ορισμού του $W^{\perp}$ έχουμε ότι $\vec{w}_i \perp \vec{w}_j'$ $\forall\ i = 1, 2, \ldots, k$ και $j = 1, 2, \ldots, \ell$. Άρα, τα μοναδιαία (και άρα μη-μηδενικά) διανύσματα $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k, \vec{w}_1', \vec{w}_2', \ldots, \vec{w}_\ell'$ είναι αμοιβαίως ορθογώνια, και ως εκ τούτου, γρ. ανεξάρτητα. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι παράγουν τον V.

$\forall\ \vec{v} \in V$, το διάνυσμα $\vec{b} = \vec{v} - \mathrm{pr}_{\vec{w}_1}(\vec{v}) - \mathrm{pr}_{\vec{w}_2}(\vec{v}) - \cdots - \mathrm{pr}_{\vec{w}_k}(\vec{v})$ είναι κάθετο σε όλα τα $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k$. Άρα, είναι κάθετο και σε κάθε γραμ. συνδυασμό τους, δηλ. κάθετο σε κάθε $\vec{w} \in W$. Άρα, $\vec{b} \in W^{\perp}$ και επομένως: $\vec{b} = \lambda_1 \vec{w}_1' + \lambda_2 \vec{w}_2' + \ldots + \lambda_\ell \vec{w}_\ell' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{v} = \mathrm{pr}_{\vec{w}_1}(\vec{v}) + \mathrm{pr}_{\vec{w}_2}(\vec{v}) + \cdots + \mathrm{pr}_{\vec{w}_k}(\vec{v}) + \lambda_1 \vec{w}_1' + \lambda_2 \vec{w}_2' + \cdots + \lambda_\ell \vec{w}_\ell' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|} \right) \vec{w}_1 + \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|} \right) \vec{w}_2 + \cdots + \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}_k}{\|\vec{w}_k\|} \right) \vec{w}_k + \lambda_1 \vec{w}_1' + \lambda_2 \vec{w}_2' +$$

$$+ \cdots + \lambda_\ell \vec{w}_\ell'$$

Άρα, κάθε $\vec{v} \in V$ γράφεται ως γρ. συνδυασμός των $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k, \vec{w}_1', \vec{w}_2', \ldots, \vec{w}_\ell'$ και συνεπώς, τα $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k, \vec{w}_1', \vec{w}_2', \ldots, \vec{w}_\ell'$ παράγουν τον V.

β) $\forall\, \vec{v} \in W \cap W^{\perp}$ έχουμε $\vec{v} \in W$ και $\vec{v} \in W^{\perp}$. Άρα $\vec{v} \perp \vec{v} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \|\vec{v}\|^2 = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

Άρα $W \cap W^{\perp} = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow W + W^{\perp} = W \oplus W^{\perp}$

Επίσης, $\dim(W \oplus W^{\perp}) = \dim W + \dim W^{\perp} = k + \ell = \dim V$

και επειδή $W \oplus W^{\perp}$ υπόχωρος του V, συνεπάγεται ότι

$W \oplus W^{\perp} = V$

γ) Τα $\vec{w}_{k+1}, \vec{w}_{k+2}, \ldots, \vec{w}_n$ είναι κάθετα σε όλα τα $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k$. Άρα είναι κάθετα και σε κάθε γρ. συνδυασμό τους, δηλ. κάθετα σε κάθε $\vec{w} \in W$. Επομένως, $\{\vec{w}_{k+1}, \vec{w}_{k+2}, \ldots, \vec{w}_n\} \in W^{\perp}$

Επιπλέον, $\vec{w}_{k+1}, \vec{w}_{k+2}, \ldots, \vec{w}_n$ είναι γρ. ανεξάρτητα (ως στοιχεία βάσης του V) πλήθους $n-k = \dim W^{\perp}$. Άρα, αποτελούν βάση του $W^{\perp}$.

δ) Έστω $\{\vec{w}_1', \vec{w}_2', \ldots, \vec{w}_\ell'\}$ ορθοκανονική βάση του $W^{\perp}$. Από το ερώτημα (α) έχουμε ότι το $\{\vec{w}_1', \vec{w}_2', \ldots, \vec{w}_\ell', \vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k\}$ είναι ορθοκανονική βάση του V, δηλ. έχουμε επεκτείνει την ορθοκανονική βάση του $W^{\perp}$ σε ορθοκανονική βάση του V, άρα λόγω της πρότασης (γ), το $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots \vec{w}_k\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $(W^{\perp})^{\perp}$. Συνεπώς, $W = (W^{\perp})^{\perp}$

ΑΣΚΗΣΗ 14

α) Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ δηλ. $R(A^T) = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1),\,(+)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Άρα $r(A) = 3 \Rightarrow \dim R(A^T) = 3$ δηλ. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ γρ. ανεξάρτητα

Άρα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ βάση του $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt, οπότε έχουμε:

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1 = (1,1,0,0)$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - pr_{\vec{w}_1}(\vec{v}_2) = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|^2}\vec{w}_1 = (0,0,1,1) - \frac{0}{1^2+1^2}(1,1,0,0) = (0,0,1,1)$$

$$\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - pr_{\vec{w}_1}(\vec{v}_3) - pr_{\vec{w}_2}(\vec{v}_3) = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|^2}\vec{w}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|^2}\vec{w}_2 =$$

$$= (1,0,-1,0) - \frac{1}{1^2+1^2}(1,1,0,0) - \frac{(-1)}{1^2+1^2}(0,0,1,1) =$$

$$= (1,0,-1,0) - \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0,0\right) + \left(0,0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) =$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

Άρα {ορθογώνια βάση του $<\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3>$} $= \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\} =$

$$= \left\{ (1,1,0,0), (0,0,1,1), \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \right\}$$

Επιπλέον, $\|\vec{w}_1\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\|\vec{w}_2\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{w}_3\| = \sqrt{\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}} = 1$

Άρα, {ορθοκανονική βάση του $<\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3>$} $= \left\{ \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|}, \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|}, \frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|} \right\} =$

$$= \left\{ \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \left(0,0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \right\}$$

Β) $R(A^T) = <\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3> \Rightarrow <\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3>^{\perp} = N(A)$

$$A\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow U\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} X_3 + X_4 = 0 \Rightarrow X_3 = -X_4 \\ -X_2 - X_3 = 0 \Rightarrow X_2 = X_4 \\ X_1 + X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = -X_4 \end{cases}$$

Άρα $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = X_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ με $X_4 \in \mathbb{R}$

Άρα {βάση του $N(A)$} $= \{(-1,1,-1,1)\} \Rightarrow$ {ορθοκανον. βάση του $N(A)$} $=$

$$= \left\{ \tfrac{1}{\sqrt{4}}(-1,1,-1,1) \right\} = \left\{ \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \right\}$$

γ) Αν επεκτείνουμε την ορθοκανονική βάση του $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$ χρησιμοποιώντας το διάνυσμα της ορθοκανονικής βάσης του $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle^{\perp}$ παίρνουμε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^4$ (Βλ. Άσκηση 13(α)).

Άρα: $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_4 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

και $\mathbb{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^4$

Αν $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ οι συντ/νες του $\vec{v} = (-4, 15, 7, 8)$ ως προς την $\mathbb{B}$, τότε: $\lambda_1 = \vec{v} \cdot \vec{b}_1 = -\frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{15}{\sqrt{2}} = \frac{11}{\sqrt{2}}$,

$\lambda_2 = \vec{v} \cdot \vec{b}_2 = \frac{7}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{15}{\sqrt{2}}$, $\lambda_3 = \vec{v} \cdot \vec{b}_3 = -2 - \frac{15}{2} - \frac{7}{2} + 4 = -9$

$\lambda_4 = \vec{v} \cdot \vec{b}_4 = 2 + \frac{15}{2} - \frac{7}{2} + \frac{8}{2} = 10$

Άρα: $\vec{v} = \underbrace{\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \lambda_3 \vec{b}_3}_{\vec{u}} + \underbrace{\lambda_4 \vec{b}_4}_{\vec{w}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{11}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{15}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + (-9) \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + 10 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\vec{u}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\vec{w}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 15

α) Έστω $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&-1\end{bmatrix}$ δηλ. $V=\langle \vec{v}_1,\vec{v}_2\rangle = R(A^T)$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{array}{l}(-1)\\ \leftarrow(+)\end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&-2\end{bmatrix}=U$$

Άρα $r(A)=2 \Rightarrow \dim R(A^T)=2=m$ δηλ. $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ γρ. ανεξάρτητα και άρα $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ βάση του V

Επίσης, $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot(-1)=0$

Άρα $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ ορθογώνια βάση του V

και $\left\{\dfrac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}, \dfrac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}\right\} = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\right\} =$

$= \left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ ορθοκανονική βάση του V

Επειδή $V=R(A^T)$, αρκεί να βρούμε μια ορθοκανονική βάση του $V^\perp = N(A)$ για να επεκτείνουμε την παραπάνω ορθοκανονική βάση του V.

$$A\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x_3=0\\ x_1+x_3=0 \Rightarrow x_1=0\end{cases}$$

Άρα $(x_1,x_2,x_3)=x_2(0,1,0)$ με $x_2\in\mathbb{R}$

Επομένως $\{(0,1,0)\}$ βάση του $N(A)=V^\perp$ και μάλιστα ορθοκανονική αφού $\|(0,1,0)\|=1$

Άρα: $\left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),(0,1,0)\right\}$ ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$

β) Αν $\vec{b}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,1/\sqrt{2}\right)$, $\vec{b}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{b}_3=(0,1,0)$

Τότε $\vec{v}=\lambda_1\vec{b}_1+\lambda_2\vec{b}_2+\lambda_3\vec{b}_3$ με $\lambda_1=\vec{v}\cdot\vec{b}_1=2$,

$\lambda_2=\vec{v}\cdot\vec{b}_2=0$, $\lambda_3=\vec{v}\cdot\vec{b}_3=3$

Άρα οι συντ/γμένες του $\vec{v}$ ως προς την ορθοκανονική βάση $\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ είναι $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (2, 0, 3)$

Συνεπώς $\vec{v} = 2\vec{b_1} + 0\vec{b_2} + 3\vec{b_3} \Rightarrow \vec{v} = 2\vec{b_1} + 3\vec{b_3}$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 16}}$

$\forall\ \vec{v} \in V$ έχουμε: $\vec{v} = \lambda_1\vec{b_1} + \lambda_2\vec{b_2} + \dots + \lambda_n\vec{b_n}$ με $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

Άρα $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = (\lambda_1\vec{b_1} + \lambda_2\vec{b_2} + \dots + \lambda_n\vec{b_n})\cdot(\lambda_1\vec{b_1} + \lambda_2\vec{b_2} + \dots + \lambda_n\vec{b_n})$

Όμως $\vec{b_i}\cdot\vec{b_i} = \|\vec{b_i}\|^2 = 1 \quad \forall\ i = 1, 2, \dots, n$

ενώ $\vec{b_i}\cdot\vec{b_j} = 0 \quad \forall\ i \neq j$

Άρα $\|\vec{v}\|^2 = \lambda_1^2(\vec{b_1}\cdot\vec{b_1}) + \lambda_2^2(\vec{b_2}\cdot\vec{b_2}) + \dots + \lambda_n^2(\vec{b_n}\cdot\vec{b_n}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\vec{v}\|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 \Rightarrow \|\vec{v}\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \qquad (1)$

Όμως: $\vec{v}\cdot\vec{b_1} = (\lambda_1\vec{b_1} + \lambda_2\vec{b_2} + \dots + \lambda_n\vec{b_n})\cdot\vec{b_1} \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{b_1} = \lambda_1$

Ομοίως $\vec{v}\cdot\vec{b_i} = \lambda_i \quad \forall\ i = 1, 2, \dots, n$

Άρα η (1) γίνεται: $\|\vec{v}\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(\vec{v}\cdot\vec{b_i})^2$