ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Γραμμική Άλγεβρα & Αναλυτική Γεωμετρία» (ΕΜ111) – Χειμερινό Εξάμηνο 2008-2009
Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

7º ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Έστω οι πίνακες $A=\begin{bmatrix}1&2&-3&0\\7&-1&-3&4\\6&5&0&2\\3&4&-1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0&-1&4\\2&3&1&-4\\3&1&0&1\\-1&11&-2&1\end{bmatrix}$.

α) Υπολογίστε την ορίζουσα κάθε πίνακα αφού εφαρμόσετε απαλοιφή Gauss για να τους φέρετε σε τριγωνική μορφή.

β) Ποιο συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε άμεσα για την τάξη κάθε πίνακα, αν γνωρίζετε μόνο τις τιμές $\det(A)$, $\det(B)$;

γ) Υπολογίστε τους συμπαράγοντες όλων των στοιχείων των A και B, και σχηματίστε τους συζυγείς $\operatorname{adj}(A)$ και $\operatorname{adj}(B)$

δ) Υπολογίστε τους αντιστρόφους των A και B εφόσον υπάρχουν, καθώς και τις ορίζουσες τους.

ε) Τι συμπέρασμα βγάζετε για τις λύσεις των ομογενών συστημάτων $A\vec{x}=\vec{0}$ και $B\vec{y}=\vec{0}$;

στ) Τι συμπέρασμα βγάζετε για τις λύσεις των μη-ομογενών συστημάτων $A\vec{x}=\vec{b}$ και $B\vec{y}=\vec{b}$, με $\vec{b}\neq\vec{0}$;

ζ) Ποια η λύση του $A\vec{x}=\vec{b}$ για $\vec{b}=(1,2,0,-3)$;

Άσκηση 2: Υπολογίστε τις ορίζουσες των επόμενων πινάκων χρησιμοποιώντας: α) το ανάπτυγμα με συμπαράγοντες ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη, β) απαλοιφή Gauss για να φέρετε τους πίνακες σε τριγωνική μορφή, γ) τον κανόνα του Sarrus.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-3\\0&4&5\\-2&0&6\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}8&3&2\\0&0&4\\-3&1&0\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}2&3&4\\7&9&-25\\2&3&-4\end{bmatrix}$$

Άσκηση 3: Ποιες είναι οι ορίζουσες των πινάκων: $-A, 2A, A^2, A^{20}, AB, BA, ABC, CAB, B^TB$, και $B^{100}(C^T)^{16}$, για τους πίνακες της άσκησης 2.

Άσκηση 4: Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών, να δειχθούν τα εξής:

α) $\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\yz&zx&xy\end{vmatrix}=(x-y)(y-z)(z-x)$, β) $\begin{vmatrix}1+\alpha^2&\alpha&1\\1+\beta^2&\beta&1\\1+\gamma^2&\gamma&1\end{vmatrix}=-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$,

γ) $\begin{vmatrix}\alpha_1x^3+\beta_1x^2+\gamma_1&\alpha_1&\beta_1\\\alpha_2x^3+\beta_2x^2+\gamma_2&\alpha_2&\beta_2\\\alpha_3x^3+\beta_3x^2+\gamma_3&\alpha_3&\beta_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_1&\beta_1&\gamma_1\\\alpha_2&\beta_2&\gamma_2\\\alpha_3&\beta_3&\gamma_3\end{vmatrix}$, δ) $\begin{vmatrix}y+z&x&x^3\\z+x&y&y^3\\x+y&z&z^3\end{vmatrix}=(x+y+z)^2(x-y)(y-z)(z-x)$

Άσκηση 5: Δείξτε ότι η 4 επί 4 «ορίζουσα Vandermonde» $\begin{vmatrix}1&\alpha_1&\alpha_1^2&\alpha_1^3\\1&\alpha_2&\alpha_2^2&\alpha_2^3\\1&\alpha_3&\alpha_3^2&\alpha_3^3\\1&\alpha_4&\alpha_4^2&\alpha_4^3\end{vmatrix}$ ισούται με:

$$(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_4)=\prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_i-\alpha_j)$$

Άσκηση 6: Να λυθεί η αλγεβρική εξίσωση: $\begin{vmatrix}x^3-1&x^2-1&x-1\\x^3-8&x^2-4&x-2\\x^3-27&x^2-9&x-3\end{vmatrix}=0$, ως προς $x\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 7: Δείξτε ότι αν ο πίνακας $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος, τότε και ο $\operatorname{adj}(A)$ είναι αντιστρέψιμος. Ποιος είναι ο $\left[\operatorname{adj}(A)\right]^{-1}$;

Άσκηση 8: Δίνεται ο 2×2 πίνακας A για τον οποίο ισχύει ότι $A^2-5A+6I=0$. Δείξτε ότι υπάρχει ο A^{-1} και γράψτε τον ως συνάρτηση του A.

Άσκηση 9: Δείξτε ότι η ορίζουσα ενός αντισυμμετρικού πίνακα $K\in\mathbb{R}^{n\times n}$ είναι μηδέν όταν n είναι περιττός, ενώ όταν n είναι άρτιος δεν μπορούμε να βγάλουμε σχετικό συμπέρασμα. Δώστε ένα 4×4 παράδειγμα αντισυμμετρικού πίνακα K με $\det(K)\neq0$.

Άσκηση 10: Έστω $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $AB=-BA$ και βρείτε το λάθος στον επόμενο συλλογισμό: Παίρνοντας τις ορίζουσες, έχουμε $(\det A)(\det B)=-(\det B)(\det A)\Rightarrow 2(\det B)(\det A)=0$, άρα ένας τουλάχιστον εκ των A και B έχει μηδενική ορίζουσα. Συνεπώς, η εξίσωση $AB=-BA$ είναι δυνατή μόνον όταν ο A ή ο B είναι ιδιόμορφος.

Άσκηση 11: Βρείτε τις ορίζουσες των επόμενων πινάκων: α) $U=\begin{bmatrix}3&3&6&6\\0&1&-2&-2\\0&0&2&6\\0&0&0&-3\end{bmatrix}$, β) U^T, γ) U^{-1},

δ) $M=\begin{bmatrix}0&0&0&-3\\0&0&2&6\\0&1&-2&-2\\3&3&6&6\end{bmatrix}$, ε) $A=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-1&2\end{bmatrix}$.

Άσκηση 12: α) Βρείτε την παραγοντοποίηση LU, τους οδηγούς και την ορίζουσα του πίνακα 4 επί 4, του οποίου τα στοιχεία είναι: a_{ij} = το μικρότερο από τα i και j.

β) Βρείτε την ορίζουσα του πίνακα 4 επί 4, του οποίου τα στοιχεία είναι a_{ij} = το μικρότερο από τα n_i και n_j, για $n_1=2$, $n_2=6$, $n_3=8$, $n_4=10$. Μπορείτε να βρείτε ένα γενικό κανόνα για κάθε $n_1\le n_2\le n_3\le n_4$;

Άσκηση 13: Δυο πίνακες $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ λέγονται *όμοιοι* αν και μόνο αν υπάρχει μη-ιδιόμορφος πίνακας $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $B=M^{-1}AM$. Δείξτε ότι $\det B=\det A$ και ότι όταν ο A είναι αντιστρέψιμος, ισχύει: $\det(A^{-1}B)=1$.

Άσκηση 14: Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. α) Αν κάθε γραμμή του A έχει άθροισμα στοιχείων μηδέν, δείξτε ότι $\det A=0$. β) Αν κάθε γραμμή του A έχει άθροισμα στοιχείων 1, δείξτε ότι $\det(A-I)=0$. Δείξτε με κάποιο παράδειγμα ότι το τελευταίο δεν σημαίνει $\det A=1$.

Άσκηση 15: Χρησιμοποιήστε συζυγείς πίνακες για να αντιστρέψετε τους

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}\quad\text{και}\quad B=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix}$$

Άσκηση 16: Υπολογίστε τις ορίζουσες των πινάκων: $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Μπορείτε να προβλέψετε την $\det A_n$ του πίνακα $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με το ίδιο σχεδίασμα (μηδενικά στη διαγώνιο και μονάδες παντού αλλού);

Άσκηση 17: Επιλύστε τα παρακάτω συστήματα με αγνώστους $x, y, z \in \mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer: α) $\begin{cases} ax + by = 1 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$, β) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 3x - 2y - 4z = -2 \\ 2x + 3y - z = -6 \end{cases}$

Άσκηση 18: Θεωρείστε τον πίνακα $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ που προκύπτει όταν ένα διάνυσμα $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ αντικαταστήσει τη στήλη j του μοναδιαίου πίνακα I_n.

α) Βρείτε την ορίζουσα του M.

β) Αν $A\vec{x} = \vec{b}$ με $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, δείξτε ότι το γινόμενο AM είναι ο πίνακας B_j της εξίσωσης του κανόνα του Cramer: $x_j = \dfrac{\det B_j}{\det A}$.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ & ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (ΕΜ-111)

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 7ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

α) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 7 & -1 & -3 & 4 \\ 6 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \; (-7)\;(-6)\;(-3) \;(+) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -15 & 18 & 4 \\ 0 & -7 & 18 & 2 \\ 0 & -2 & 8 & 1 \end{bmatrix} \; (-7/15)\;(-2/15)\;(+) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -15 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 48/5 & 2/15 \\ 0 & 0 & 28/5 & 7/15 \end{bmatrix} \; (-7/12)\;(+) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -15 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 48/5 & 2/15 \\ 0 & 0 & 0 & 7/18 \end{bmatrix} = U_A$

$\det A = (-1)^k \det U_A = \det U_A = 1 \cdot (-15) \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{7}{18} = -56$

(όπου $k=0$ το πλήθος εναλλαγών γραμμών που χρησιμοποιήσαμε)

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 11 & -2 & 1 \end{bmatrix} \; (-2)\;(-3)\;1 \;(+) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & -12 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 11 & -3 & 5 \end{bmatrix} \; (-1/3)\;(-11/3)\;(+) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -14 & 49 \end{bmatrix} \; 7 \;(+) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_B$

$\det U_B = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \det B = 0$

β) $\det A \neq 0 \iff r(A) = n = 4$

$\det B = 0 \iff r(B) < n \Rightarrow r(B) < 4$

γ) $C_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$, άρα:

$$C_{11} = |A_{11}| = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -5(-3+4) - 2(1+12) = -5-26 = -31$$

$$C_{12} = (-1)|A_{12}| = (-1)\begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 6 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = +6 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 6(-3+4) + 2(-7+9) = 6+4 = 10$$

$$C_{13} = |A_{13}| = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 7(5-8) - 6(-1-16) + 3(-2-20) = 15$$

$$C_{14} = (-1)|A_{14}| = (-1)\begin{vmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 6 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 9 + 41 = 68$$

$$C_{21} = (-1)|A_{21}| = (-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = +2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 10 - 15 = 5$$

$$C_{22} = |A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -2\cdot 8 + 18 = 2$$

$$C_{23} = (-1)|A_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = +2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 2(-2) + 7 = 3$$

$$C_{24} = |A_{24}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (-3)9 - (-7) = -20$$

Ομοίως, βρίσκουμε: $C_{31} = -49$, $C_{32} = 14$, $C_{33} = -7$, $C_{34} = 84$,

$C_{41} = 78$, $C_{42} = -36$, $C_{43} = 2$, $C_{44} = -144$

Ο συζυγής (adjoint) του A είναι ο πίνακας: $\mathrm{adj}(A) = C^T = (c_{ij})^T$

$$\text{δηλ. } \mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{41} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & C_{42} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -31 & 5 & -49 & 78 \\ 10 & 2 & 14 & -36 \\ 15 & 3 & -7 & 2 \\ 68 & -20 & 84 & -144 \end{bmatrix}$$

Ανάλογα, για τους συμπαράγοντες των στοιχείων του B, έχουμε:

$C_{ij} = (-1)^{i+j}|B_{ij}|$ όπου B_{ij} ο ελάσσων πίνακας του b_{ij} στοιχείου του B.

$$\text{άρα: } C_{11} = |B_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 11 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 11 & -2 \end{vmatrix} = 7 - (-17) = 24$$

Ομοίως βρίσκουμε: $C_{12} = -24$, $C_{13} = -168$, $C_{14} = -48$, $C_{21} = 18$, $C_{22} = -18$,

$C_{23} = -126$, $C_{24} = -36$, $C_{31} = -21$, $C_{32} = 21$, $C_{33} = 147$, $C_{34} = 42$,

$C_{41} = -3$, $C_{42} = 3$, $C_{43} = 21$, $C_{44} = 6$

Επομένως:

$$\mathrm{adj}(B) = \begin{bmatrix} 24 & 18 & -21 & -3 \\ -24 & -18 & 21 & 3 \\ -168 & -126 & 147 & 21 \\ -48 & -36 & 42 & 6 \end{bmatrix}$$

δ) $\det A = -56 \neq 0$ και άρα $\exists\, A^{-1}$. Συγκεκριμένα: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}(A) \Rightarrow$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-56)} \begin{bmatrix} -31 & 5 & -49 & 78 \\ 10 & 2 & 14 & -36 \\ 15 & 3 & -7 & 2 \\ 68 & -20 & 84 & -144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31/56 & -5/56 & 7/8 & -39/28 \\ -5/28 & -1/28 & -1/4 & 9/14 \\ -15/56 & -3/56 & 1/8 & -1/28 \\ -17/14 & 5/14 & -3/2 & 18/7 \end{bmatrix}$$

με $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} = -\dfrac{1}{56}$

Εφόσον $\det B = 0$, ο B είναι μη-αντιστρέψιμος, δηλ. $\nexists\, B^{-1}$

ε) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \{A\vec{x} = \vec{0}$ έχει μοναδική λύση την $\vec{x} = \vec{0}\}$
όπου $\vec{0} = (0,0,0,0)$

$\det B = 0 \Leftrightarrow \{B\vec{y} = \vec{0}$ έχει τη λύση $\vec{y} = \vec{0}$, καθώς και άπειρες μη-μηδενικές λύσεις $\vec{y} \neq \vec{0}\}$

στ) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \{A\vec{x} = \vec{b}$ έχει μοναδική λύση την $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, $\forall\, \vec{b} \in \mathbb{R}^4\}$

$\det B = 0 \Leftrightarrow \{B\vec{y} = \vec{b}$ δεν έχει λύση (όταν $\vec{b} \notin R(B)$) ή έχει άπειρες λύσεις (όταν $\vec{b} \in R(B)$)$\}$

ζ) $A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31/56 & -5/56 & 7/8 & -39/28 \\ -5/28 & -1/28 & -1/4 & 9/14 \\ -15/56 & -3/56 & 1/8 & -1/28 \\ -17/14 & 5/14 & -3/2 & 18/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 255/56 \\ -61/28 \\ -15/56 \\ -115/14 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

α) Μας διευκολύνει να υπολογίσουμε την ορίζουσα ως προς γραμμή ή στήλη με όσο το δυνατό περισσότερα μηδενικά. Ως εκ τούτου, υπολογίζουμε την ορίζουσα του A ως προς την 3η γραμμή:

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{3j} (-1)^{3+j} |A_{3j}| = -2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -2(10+12) + 6(4) = -20$$

Υπολογίζουμε την $\det B$ ως προς την 2η γραμμή:

$$\det B = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -4(8+9) = -68$$

Υπολογίζουμε την $\det C$ ως προς την 1η γραμμή:

$$\det C = 2 \begin{vmatrix} 9 & -25 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 7 & -25 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= 2(-36+75) - 3(-28+50) + 4(21-18) =$$
$$= 24$$

β) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\,(+)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)\,(+)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = U_A$$

$$\det A = (-1)^0 \det U_A = 1 \cdot 4 \cdot (-5) = -20$$

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{3/8\,(+)} \begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 17/8 & 3/4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 0 & 17/8 & 3/4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = U_B$$

$$\det B = (-1)^1 \det U_B = (-1) \cdot 8 \cdot \frac{17}{8} \cdot 4 = -68$$

$$C=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 7 & 9 & -25\\ 2 & 3 & -4\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & -3/2 & -39\\ 0 & 0 & -8\end{bmatrix} = U_c$$

$$\det C = (-1)^0 \det U_c = 2\left(-\frac{3}{2}\right)(-8) = 24$$

γ)

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}1 & 2 & -3 & 1 & 2\\ 0 & 4 & 5 & 0 & 4\\ -2 & 0 & 6 & -2 & 0\end{array}\right|$$

$$\det A = 1\cdot 4\cdot 6 + 2\cdot 5\cdot(-2) + (-3)\cdot 0\cdot 0 - $$
$$-(-2)4(-3) - 0\cdot 5\cdot 1 - 6\cdot 0\cdot 2 =$$
$$= 24 - 20 - 24 = -20$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}8 & 3 & 2 & 8 & 3\\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0 & -3 & 1\end{array}\right|$$

$$\det B = 3\cdot 4\cdot(-3) - 1\cdot 4\cdot 8 = -36 - 32 = -68$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}2 & 3 & 4 & 2 & 3\\ 7 & 9 & -25 & 7 & 9\\ 2 & 3 & -4 & 2 & 3\end{array}\right|$$

$$\det C = 2\cdot 9\cdot(-4) + 3\cdot(-25)\cdot 2 + 4\cdot 7\cdot 3 - 2\cdot 9\cdot 4 -$$
$$- 3(-25)2 - (-4)\cdot 7\cdot 3 = -72 - 150 + 84 -$$
$$- 72 + 150 + 84 = 24$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

$$\det(-A) = \det((-1)A) = (-1)^3 \det A = -\det A = 20$$
$$\det(2A) = 2^3 \det A = 8(-20) = -160$$
$$\det(A^2) = \det(AA) = (\det A)(\det A) = (\det A)^2 = 400$$
$$\det(A^{20}) = \det(AA\ldots A) = (\det A)^{20} = (-20)^{20} = 1.04857\cdot 10^{26}$$
$$\det(AB) = (\det A)(\det B) = (-20)(-68) = 1360$$
$$\det(BA) = (\det B)(\det A) = \det(AB) = 1360$$
$$\det(ABC) = (\det A)(\det B)(\det C) = (-20)(-68)24 = 32640$$
$$\det(CAB) = \det(ABC) = 32640$$

$$\det(B^T B) = \det(B^T)(\det B) = (\det B)^2 = (-68)^2 = 4624$$
$$\det\left(B^{100}(C^T)^{16}\right) = (\det B)^{100}(\det C)^{16} = (-68)^{100}(24)^{16}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

α)

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ yz & zx & xy\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ x-z & y-z & z\\ yz-xy & zx-xy & xy\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ x-z & y-z & z\\ (x-z)(-y) & -x(y-z) & xy\end{vmatrix} =$$

$$= (x-z)(y-z)\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & z\\ -y & -x & xy\end{vmatrix} = (x-z)(y-z)\begin{vmatrix}1 & 1\\ -y & -x\end{vmatrix} =$$

$$= (x-z)(y-z)(-x+y) = (x-y)(y-z)(z-x)$$

β)

$$\begin{vmatrix}1+\alpha^2 & \alpha & 1\\ 1+\beta^2 & \beta & 1\\ 1+\gamma^2 & \gamma & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\alpha^2-\gamma^2 & \alpha-\gamma & 0\\ \beta^2-\gamma^2 & \beta-\gamma & 0\\ 1+\gamma^2 & \gamma & 1\end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\begin{vmatrix}\alpha+\gamma & 1 & 0\\ \beta+\gamma & 1 & 0\\ 1+\gamma^2 & \gamma & 1\end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\begin{vmatrix}\alpha+\gamma & 1\\ \beta+\gamma & 1\end{vmatrix} = (\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\beta) =$$

$$= -(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$$

γ) $$\begin{vmatrix} \alpha_1X^3+\beta_1X^2+\gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2X^3+\beta_2X^2+\gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3X^3+\beta_3X^2+\gamma_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1X^3 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2X^3 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3X^3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1X^2 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_2X^2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_3X^2 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = X^3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} + X^2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = X^3\cdot 0 + X^2 \cdot 0 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

δ) $$\begin{vmatrix} y+z & x & x^3 \\ z+x & y & y^3 \\ x+y & z & z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y+z & x & x^3 \\ x+y+z & y & y^3 \\ x+y+z & z & z^3 \end{vmatrix} = (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+y+z) \begin{vmatrix} 0 & x-z & x^3-z^3 \\ 0 & y-z & y^3-z^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-z)(y-z) \begin{vmatrix} 0 & 1 & x^2+xz+z^2 \\ 0 & 1 & y^2+yz+z^2 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z)(x-z)(y-z) \begin{vmatrix} 1 & x^2+xz+z^2 \\ 1 & y^2+yz+z^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+y+z)(x-z)(y-z) \begin{vmatrix} 1 & x^2+xz+z^2 \\ 0 & y^2-x^2+yz-xz \end{vmatrix} =$$

$$= (x+y+z)(x-z)(y-z) \begin{vmatrix} 1 & x^2+xz+z^2 \\ 0 & (y-x)(y+x)+(y-x)z \end{vmatrix} =$$

$$= (x+y+z)(x-z)(y-z)(y-x) \begin{vmatrix} 1 & x^2+xz+z^2 \\ 0 & y+x+z \end{vmatrix} =$$

$$= (x+y+z)(x-z)(y-z)(y-x)(y+x+z) =$$

$$= (x+y+z)^2(x-y)(y-z)(z-x)$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \\ 1 & \alpha_4 & \alpha_4^2 & \alpha_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1-\alpha_2 & \alpha_1^2-\alpha_2^2 & \alpha_1^3-\alpha_2^3 \\ 0 & \alpha_2-\alpha_3 & \alpha_2^2-\alpha_3^2 & \alpha_2^3-\alpha_3^3 \\ 0 & \alpha_3-\alpha_4 & \alpha_3^2-\alpha_4^2 & \alpha_3^3-\alpha_4^3 \\ 1 & \alpha_4 & \alpha_4^2 & \alpha_4^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_4) \begin{vmatrix} 0 & 1 & \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2 \\ 0 & 1 & \alpha_2+\alpha_3 & \alpha_2^2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3^2 \\ 0 & 1 & \alpha_3+\alpha_4 & \alpha_3^2+\alpha_3\alpha_4+\alpha_4^2 \\ 1 & \alpha_4 & \alpha_4^2 & \alpha_4^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_4)(-1) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2 \\ 1 & \alpha_2+\alpha_3 & \alpha_2^2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3^2 \\ 1 & \alpha_3+\alpha_4 & \alpha_3^2+\alpha_3\alpha_4+\alpha_4^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_4)(-1) \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1-\alpha_3 & \alpha_1^2-\alpha_3^2+\alpha_2(\alpha_1-\alpha_3) \\ 0 & \alpha_2-\alpha_4 & \alpha_2^2-\alpha_4^2+\alpha_3(\alpha_2-\alpha_4) \\ 1 & \alpha_3+\alpha_4 & \alpha_3^2+\alpha_3\alpha_4+\alpha_4^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4) \begin{vmatrix} 0 & 1 & (\alpha_1+\alpha_3)+\alpha_2 \\ 0 & 1 & (\alpha_2+\alpha_4)+\alpha_3 \\ 1 & \alpha_3+\alpha_4 & \alpha_3^2+\alpha_3\alpha_4+\alpha_4^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1+\alpha_3+\alpha_2 \\ 1 & \alpha_2+\alpha_4+\alpha_3 \end{vmatrix} =$$

$$= -(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_1) =$$

$$= (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_4) = \prod_{1\le i<j\le 4}(\alpha_i-\alpha_j)$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

$$\begin{vmatrix} x^3-1 & x^2-1 & x-1 \\ x^3-8 & x^2-4 & x-2 \\ x^3-27 & x^2-9 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x-1)(x^2+x+1) & (x-1)(x+1) & x-1 \\ (x-2)(x^2+2x+4) & (x-2)(x+2) & x-2 \\ (x-3)(x^2+3x+9) & (x-3)(x+3) & x-3 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)(x-2)(x-3) \begin{vmatrix} x^2+x+1 & x+1 & 1 \\ x^2+2x+4 & x+2 & 1 \\ x^2+3x+9 & x+3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)(x-2)(x-3) \begin{vmatrix} x^2+x+1 & x+1 & 1 \\ x+3 & 1 & 0 \\ 2x+8 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)(x-3) \begin{vmatrix} x+3 & 1 \\ 2x+8 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)(x-2)(x-3)\,(2x+6-2x-8) = -2(x-1)(x-2)(x-3)$$

Άρα, οι λύσεις της εξίσωσης είναι: $x=1$, $x=2$ και $x=3$

ΑΣΚΗΣΗ 7

$A(\text{adj}\,A) = (\det A)\, I_n \quad \forall \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Άρα $(\det A)\left[\det(\text{adj}\,A)\right] = (\det A)^n (\det I_n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\det A)\left[\det(\text{adj}\,A)\right] = (\det A)^n \qquad (1)$$

{A αντιστρέψιμος} ανν $\{\det A \neq 0\}$, οπότε $(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(\text{adj}\,A) = (\det A)^{n-1} \Rightarrow \det(\text{adj}\,A) \neq 0 \Leftrightarrow$ {adj A αντιστρέψιμος}

Επίσης, $A(\text{adj}\,A) = (\text{adj}\,A)A = (\det A) I_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\det A} A\right) \text{adj}\,A = \text{adj}\,A \left(\frac{1}{\det A} A\right) = I_n \Rightarrow (\text{adj}\,A)^{-1} = \frac{1}{\det A} A$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

$A^2 - 5A + 6I = 0 \Rightarrow A^2 - 5A = -6I \Rightarrow A(A-5I) = -6I \Rightarrow$

$\Rightarrow (\det A)\left[\det(A-5I)\right] = (-6)^2 \Rightarrow (\det A)\left[\det(A-5I)\right] \neq 0$

$\Rightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ αντιστρέψιμος (δηλ. $\exists\, A^{-1}$)

Από την παραπάνω σχέση: $A(A-5I) = -6I \Rightarrow A - 5I = -6A^{-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{5}{6} I - \frac{1}{6} A$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

{K αντισυμμετρικός} $\Leftrightarrow K = -K^T \Rightarrow \det K = \det(-K^T) \Rightarrow$

$\Rightarrow \det K = (-1)^n \det K^T \Rightarrow \det K = (-1)^n \det K \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[1-(-1)^n\right] \det K = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0\cdot \det K = 0 & \text{για } n \text{ άρτιο (που ισχύει ακόμα και αν } \det K \neq 0) \\ 2\det K = 0 \Rightarrow \det K = 0 & \text{για } n \text{ περιττό} \end{cases}$$

Έστω $K = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & b & c \\ -\alpha & 0 & d & f \\ -b & -d & 0 & h \\ -c & -f & -h & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det K = (\alpha h - bf + cd)^2$

Δηλ. αρκεί να βρούμε $\alpha, h, b, f, c, d \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\alpha h - bf + cd \neq 0$

Αν π.χ. $h \neq 0$ τότε $\alpha \neq \dfrac{bf-cd}{h}$, οπότε αρκεί να δώσουμε τιμές στα b, f, c, d, και h και να πάρουμε $\alpha \neq (bf-cd)/h$. Για παράδειγμα, έστω $b=1$, $f=2$, $c=3$, $d=4$, $h=5$ οπότε αρκεί

$\alpha \neq \dfrac{1\cdot 2 - 3\cdot 4}{5} = -2$, π.χ. $\alpha = -1$

Επομένως, ένα παράδειγμα ενός 4x4 αντισυμμετρικού πίνακα K με $\det K \neq 0$ είναι:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & -4 & 0 & 5 \\ -3 & -2 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{με } \det K = 25$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

$$AB = -BA \Rightarrow \det(AB) = \det(-BA) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\det A)(\det B) = [\det(-B)](\det A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\det A)(\det B) = [\det((-1)B)](\det A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\det A)(\det B) = (-1)^n (\det B)(\det A) \qquad (1)$$

Το οποίο δίνει $(\det A)(\det B) = -(\det B)(\det A)$ μόνο όταν n περιττός. Δηλαδή, ο συλλογισμός της εκφώνησης είναι σωστός μόνο για $n \times n$ πίνακες με n περιττό. Γενικά η (1) δίνει:

$$[1-(-1)^n](\det B)(\det A) = 0,$$ η οποία, για n άρτιο, ισχύει ακόμα και αν $\det A \neq 0$ και $\det B \neq 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 11

α) Τριγωνικός πίνακας. Άρα $\det U =$ (γινόμενο στοιχείων της κύριας διαγωνίου) $\Rightarrow \det U = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-3) = -18$

β) $\det U^T = \det U \Rightarrow \det U^T = -18$

γ) $\det(U^{-1}) = \dfrac{1}{\det U} \Rightarrow \det(U^{-1}) = -\dfrac{1}{18}$

δ) Ο M προκύπτει με εναλλαγή της 1ης με την 4η γραμμή και της 2ης με την 3η γραμμή του U. Άρα $\det M = (-1)^{\kappa} \det U \Rightarrow$

$$\Rightarrow \det M = (-1)^2 \det U \Rightarrow \det M = \det U \Rightarrow \det M = -18$$

όπου $\kappa = 2$ πλήθος των εναλλαγών γραμμών

ε) Ο πίνακας A είναι γινόμενο ενός διανύσματος-στήλη με ένα διάνυσμα-γραμμή, και επομένως, οι γραμμές του A είναι πολλαπλάσια του διανύσματος γραμμή, και οι στήλες του A είναι πολλαπλάσια του διανύσματος-στήλη. Άρα:

$$\dim R(A^T) = \dim R(A) = 1 = r(A) < 3 = n \quad (\text{μιας και } A \in \mathbb{R}^{3\times 3})$$

Άρα: $\det A = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 12

α) Έστω $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με $\alpha_{ij} =$ το μικρότερο από τα i και j. Άρα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{Δηλ. } A = A^T \ (\text{συμμετρικός})$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Δηλ. και οι τέσσερις οδηγοί είναι ίσοι με $1 \neq 0$ και ο πίνακας A είναι μη-ιδιόμορφος με $\det A = (-1)^0 \det U = \det U = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Άρα, στην ανάλυση $U = DU'$ θα έχουμε $D = I_4$ και $U' = U$

Επίσης: $\left.\begin{cases} A = A^T \\ A = LDU' \end{cases}\right\} \underset{\substack{\text{Άσκηση 19} \\ \text{Φυλλάδιο 4}}}{\Rightarrow} L^T = U'$, επομένως $L = (U')^T \Rightarrow L = U^T$

β) Έστω $A=(\alpha_{ij})\in\mathbb{R}^{4\times 4}$ με $\alpha_{ij}=\min\{n_i,n_j\}$ για $n_1=2,\ n_2=6,\ n_3=8,\ n_4=10$. Άρα:

$$A=\begin{bmatrix}2&2&2&2\\2&6&6&6\\2&6&8&8\\2&6&8&10\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{την απαλοιφή}]{\text{Εκτελέστε μόνοι σας}}\begin{bmatrix}2&2&2&2\\0&4&4&4\\0&0&2&2\\0&0&0&2\end{bmatrix}=U$$

$$\det A=(-1)^0\det U \Rightarrow \det A=2\cdot4\cdot2\cdot2=32$$

Για κάθε $n_1\le n_2\le n_3\le n_4$ έχουμε:

$$A=\begin{bmatrix}n_1&n_1&n_1&n_1\\n_1&n_2&n_2&n_2\\n_1&n_2&n_3&n_3\\n_1&n_2&n_3&n_4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}n_1&n_1&n_1&n_1\\0&n_2-n_1&n_2-n_1&n_2-n_1\\0&n_2-n_1&n_3-n_1&n_3-n_1\\0&n_2-n_1&n_3-n_1&n_4-n_1\end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}n_1&n_1&n_1&n_1\\0&n_2-n_1&n_2-n_1&n_2-n_1\\0&0&n_3-n_2&n_3-n_2\\0&0&n_3-n_2&n_4-n_2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}n_1&n_1&n_1&n_1\\0&n_2-n_1&n_2-n_1&n_2-n_1\\0&0&n_3-n_2&n_3-n_2\\0&0&0&n_4-n_3\end{bmatrix}=U$$

Άρα $\det A=(-1)^0\det U \Rightarrow \det A=n_1(n_2-n_1)(n_3-n_2)(n_4-n_3)$

ΑΣΚΗΣΗ 13

$$B=M^{-1}AM \Rightarrow \det B=\det(M^{-1}AM)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det B=(\det M^{-1})(\det A)(\det M)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det B=(\det A)\underbrace{(\det M^{-1})(\det M)}_{1}\Rightarrow \det B=\det A$$

Επίσης, $\det(A^{-1}B)=[\det(A^{-1})][\det B]=(\det A^{-1})(\det A)=1$

ΑΣΚΗΣΗ 14

α) Έστω $A=(\alpha_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ με $\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}=0\quad\forall\ i=1,2,\dots,n$

Δηλαδή:

$$\left.\begin{matrix}\alpha_{11}+\alpha_{12}+\dots+\alpha_{1n}=0\\\alpha_{21}+\alpha_{22}+\dots+\alpha_{2n}=0\\\vdots\\\alpha_{n1}+\alpha_{n2}+\dots+\alpha_{nn}=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\dots&\alpha_{1n}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\dots&\alpha_{2n}\\\vdots&\vdots&&\\\alpha_{n1}&\alpha_{n2}&\dots&\alpha_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

δηλ. το ομογενές $n\times n$ σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$ έχει και τη μη-μηδενική λύση $\vec{x}=(1,1,\dots,1)$, εκτός από την $\vec{x}=(0,0,\dots,0)$. Άρα: $\det A=0$

β) Έστω $A=(\alpha_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ με $\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}=1\quad\forall\ i=1,2,\dots,n$

Δηλαδή:

$$\left.\begin{matrix}\alpha_{11}+\alpha_{12}+\dots+\alpha_{1n}=1\\\alpha_{21}+\alpha_{22}+\dots+\alpha_{2n}=1\\\vdots\\\alpha_{n1}+\alpha_{n2}+\dots+\alpha_{nn}=1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\dots&\alpha_{1n}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\dots&\alpha_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\alpha_{n1}&\alpha_{n2}&\dots&\alpha_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\Leftrightarrow A\vec{b}=\vec{b}$$

όπου $\vec{b}=(1,1,\dots,1)$. Άρα: $A\vec{b}=\vec{b}\Leftrightarrow A\vec{b}=I\vec{b}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (A-I)\vec{b}=\vec{0}$, δηλαδή το ομογενές $n\times n$ σύστημα $(A-I)\vec{x}=\vec{0}$ έχει και τη μη-μηδενική λύση $\vec{x}=\vec{b}$ εκτός από τη $\vec{x}=\vec{0}$. Άρα $\det(A-I)=0$.

Παράδειγμα: Έστω $A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{bmatrix}$ με $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in\mathbb{R}$

και $\det A\neq 1 \Leftrightarrow \alpha_1\alpha_4-\alpha_3\alpha_2\neq 1$

ενώ $\det(A-I)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}\alpha_1-1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4-1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (\alpha_1-1)(\alpha_4-1)=\alpha_2\alpha_3$

$\Leftrightarrow \alpha_1\alpha_4-\alpha_4-\alpha_1+1=\alpha_2\alpha_3 \Leftrightarrow \alpha_1\alpha_4-\alpha_3\alpha_2=\alpha_1+\alpha_4-1$

Άρα αρκεί $\left.\begin{cases}\alpha_2\alpha_3=(\alpha_1-1)(\alpha_4-1)\\ \alpha_1+\alpha_4-1\neq 1\end{cases}\right\}$ δηλ. $\begin{cases}\alpha_2\alpha_3=(\alpha_1-1)(\alpha_4-1)\\ \alpha_4+\alpha_1\neq 2\end{cases}$

Π.χ. για $\alpha_4=3$, $\alpha_1=2$, $\alpha_3=1$ βρίσκουμε $\alpha_2=2$

δηλ. $A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ έχει $\det A=4\neq 1$

και $\det(A-I)=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0$

ΑΣΚΗΣΗ 15

$\det A = 2\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2(4-1)+(-2)=4\neq 0$

άρα ο A αντιστρέφεται. Επίσης, αφού $A=A^T \Rightarrow A^{-1}=(A^{-1})^T$ δηλ. συμμετρικός

$C_{ij}=(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$, με $C_{ij}=C_{ji}$ λόγω συμμετρίας

$C_{11}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=3$, $C_{12}=(-1)\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2$, $C_{13}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1$

$C_{21}=C_{12}=2$, $C_{22}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4$, $C_{23}=(-1)\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=2$

$C_{31}=C_{13}=1$, $C_{32}=C_{23}=2$, $C_{33}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=3$

Άρα: $\operatorname{adj}(A)=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{21} & C_{31}\\ C_{12} & C_{22} & C_{32}\\ C_{13} & C_{23} & C_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$

Άρα: $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A)=\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3/4 & 1/2 & 1/4\\ 1/2 & 1 & 1/2\\ 1/4 & 1/2 & 3/4\end{bmatrix}$

$\det B=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=$

$=2-1+0=1\neq 0$ άρα ο B αντιστρέφεται.

Επίσης $B=B^T$ (συμμετρικός) άρα και B^{-1} συμμετρικός και

επειδή $B^{-1}=\dfrac{1}{\det B}\operatorname{adj}(B)$ συνεπάγεται ότι και $\operatorname{adj}(B)$ συμμετρικός.

Άρα $C_{ij}=C_{ji}$ $\forall\, i,j\in\{1,2,3\}$ με $C_{ij}=(-1)^{i+j}\det(B_{ij})$

$C_{11}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=2$, $C_{12}=(-1)\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-1$, $C_{13}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0$

$C_{21}=C_{12}=-1$, $C_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2$, $C_{23}=C_{32}=(-1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1$

$C_{31}=C_{13}=0$, $C_{33}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1$

Άρα: $\operatorname{adj}(B)=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{21} & C_{31}\\ C_{12} & C_{22} & C_{32}\\ C_{13} & C_{23} & C_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$

Άρα: $B^{-1}=\dfrac{1}{\det B}\operatorname{adj}(B)=\operatorname{adj}(B)=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ 16

$$\det(A_2)=\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1$$

$$\det(A_3)=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1+1=2$$

$$\det(A_4)=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1&0&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$$

$$=-\det(A_3)-\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=-\det(A_3)+\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=$$

$$=-\det(A_3)-1=-2-1=-3$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $|A_2|, |A_3|, |A_4|$ έχει όρους $-1, 2, -3$ δηλ. $\det(A_n)=(-1)^{n-1}(n-1)$ για $n=2,3,4$. Θα δείξουμε επαγωγικά ότι η σχέση ισχύει $\forall\, n\geq 2$

Έστω ότι ισχύει για $n-1$, δηλ. $\det(A_{n-1})=(-1)^{n-2}(n-2)$. Για την $\det(A_n)$ έχουμε:

$$\det(A_n)=\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1&0&\cdots&0\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=$$

$$=-\underbrace{\begin{vmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{vmatrix}}_{\det(A_{n-1})=(-1)^{n-2}(n-2)}-\underbrace{\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}}_{\det(B_{n-1})}=-(-1)^{n-2}(n-2)-(\det B_{n-1})=$$

$$=(-1)^{n-1}(n-2)-(-1)^{n-2}=(-1)^{n-1}(n-2)+(-1)^{n-1}=(-1)^{n-1}(n-1)$$

εφόσον $\det(B_{n-1})=(-1)^{n-2}$. Δηλ. $\det(B_n)=(-1)^{n-1}$

<u>απόδειξη</u>: Για $n=2$, έχουμε: $\det(B_2)=\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=-1=(-1)^{2-1}$

Για $n=3$, έχουμε: $\det(B_3)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=(-1)^{3-1}$

Έστω ότι $\det(B_{n-1})=(-1)^{n-2}$. Για την $\det(B_n)$ έχουμε:

$$\det(B_n)=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0&\cdots&0\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=(-1)\underbrace{\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}}_{\det(B_{n-1})}=(-1)\det(B_{n-1})=$$

$$=(-1)(-1)^{n-2}=(-1)^{n-1}$$

Άρα: $\det(B_n)=(-1)^{n-1}\quad \forall\, n\geq 2$. Επομένως:

$\det(A_n)=(-1)^{n-1}(n-1)\quad \forall\, n\geq 2$

ΑΣΚΗΣΗ 17

α) $$\left.\begin{aligned} \alpha x + by &= 1 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha d - cb$$

$$\det B_1 = \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = d \quad , \quad \det B_2 = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix} = -c$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \alpha d - cb \neq 0$

$$x = \frac{\det B_1}{\det A} = \frac{d}{\alpha d - cb} \quad , \quad y = \frac{\det B_2}{\det A} = \frac{-c}{\alpha d - bc}$$

2) $\det A = 0 \Leftrightarrow \alpha d - cb = 0$, τότε αν

i) $\det B_1 = \det B_2 = 0$ δηλ. αν $d = -c = 0$

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

(Συγκεκριμένα: $\alpha x + by = 1$, δηλ. τα σημεία αυτής της ευθείας)

ii) $\det B_1 \neq 0$ ή $\det B_2 \neq 0$, δηλ. $d \neq 0$ ή $c \neq 0$

το σύστημα δεν έχει λύση (αδύνατο σύστημα)

β) $$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ 3x - 2y - 4z &= -2 \\ 2x + 3y - z &= -6 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 14 - 2(-3+8) + (9+4) = 14 - 10 + 13 = 17 \neq 0$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση.

$$\det B_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -4 \\ -6 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(2+12) - 2(2-24) + (-6-12) = 42 + 44 - 18 = 68$$

$$\det B_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-24) - 3(-3+8) + (-18+4) = -22 - 15 - 14 = -51$$

$$\det B_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (12+6) - 2(-18+4) + 3(9+4) = 18 + 28 + 39 = 85$$

Άρα: $x = \dfrac{\det B_1}{\det A} = \dfrac{68}{17} = 4$, $y = \dfrac{\det B_2}{\det A} = -\dfrac{51}{17} = -3$

$$z = \frac{\det B_3}{\det A} = \frac{85}{17} = 5$$

ΑΣΚΗΣΗ 18

α)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & x_1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

και I ο μοναδιαίος πίνακας $n\times n$.

$$\det M = x_1 C_{1j} + x_2 C_{2j} + \dots + x_n C_{nj} \qquad (1)$$

όπου $C_{ij} = (-1)^{i+j} |I_{ij}|$ το αλγεβρικό συμπλήρωμα του i,j στοιχείου του I.

Όμως $I^{-1} = I \Rightarrow \dfrac{1}{\det I}\, adj(I) = I \Rightarrow adj(I) = I \Rightarrow$

$$\Rightarrow C_{ji} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{για } i=j \\ 0 & \text{για } i\neq j \end{cases}$$

Άρα από (1) $\Rightarrow \det M = x_j$

β)

$$AM = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & x_1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n & \dots & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n) & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n) & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & (\alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n) & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & b_1 & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & b_2 & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & b_n & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} = B_j$$