# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

**«Γραμμική Άλγεβρα Ι» (ΕΜ111) – Χειμερινό Εξάμηνο 2006-2007,** Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

## ***$6^o$ ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ***

**Άσκηση 1:** Βρείτε τη διάσταση και μια βάση των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων για κάθε ένα από τους πίνακες:

$$\alpha)\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&2\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix},\quad \beta)\begin{bmatrix}0&2&3&0\\0&6&9&0\end{bmatrix},\quad \gamma)\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\-3&0&4&6\\-2&1&3&0\end{bmatrix},\quad \delta)\begin{bmatrix}0&0&3\\0&0&4\\4&3&2\\1&-1&5\end{bmatrix}$$

**Άσκηση 2:** Αν το γινόμενο δύο πινάκων είναι ο μηδενικός πίνακας, δηλ. $AB = 0$, δείξτε ότι α) ο χώρος στηλών του $B$ περιέχεται στο μηδενόχωρο του $A$, και β) ο χώρος γραμμών του Α περιέχεται στον αριστερό μηδενόχωρο του Β.

**Άσκηση 3:** Εξηγήστε γιατί το σύστημα $Ax = b$ είναι επιλύσιμο, αν και μόνο αν $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A')$, όπου ο $A'$ σχηματίζεται τοποθετώντας το $b$ ως επιπλέον στήλη στον $A$.

**Άσκηση 4:** Βρείτε έναν $1\times 3$ πίνακα του οποίου ο μηδενόχωρος αποτελείται από όλα τα διανύσματα $(x, y, z)$ του $\mathbb{R}^3$ για τα οποία $x + 2y + 4z = 0$. Βρείτε έναν $3\times 3$ πίνακα με τον ίδιο μηδενόχωρο.

**Άσκηση 5:** Αν το $Ax = b$ έχει πάντοτε μια τουλάχιστον λύση, δείξτε ότι η μόνη λύση του $A^T y = \mathbf{0}$ είναι η $y = \mathbf{0}$.

**Άσκηση 6:** Αν $V$ είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad v_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\quad v_3 = \begin{bmatrix}1\\5\\0\end{bmatrix}$$

Βρείτε: α) τη διάσταση και μια βάση του $V$, β) έναν πίνακα $A$ που έχει τον $V$ ως χώρο γραμμών, και γ) έναν πίνακα $B$ που έχει τον $V$ ως μηδενόχωρο.

**Άσκηση 7:** Έστω $V$ ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $U$, $W$ δύο διανυσματικοί υπόχωροι του $V$. Δείξτε ότι το άθροισμα $U + W$ είναι επίσης διανυσματικός υπόχωρος του $V$.

**Άσκηση 8:** Έστω $V$ ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $U$, $W$ δύο διανυσματικοί υπόχωροι του $V$. Δείξτε ότι $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

**Άσκηση 9:** Δίνονται οι πραγματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$: $W_1 = \langle (1,-1,-1), (1,2,3)\rangle$, και $W_2 = \langle (5,1,3)\rangle$.

α) Βρείτε βάσεις των $W_1$ και $W_2$. β) Δείξτε ότι $W_1 \cap W_2 \neq \{\mathbf{0}\}$ και ότι $W_1 \cap W_2 = W_2$.

γ) Βρείτε το $\dim(W_1 + W_2)$. δ) Βρείτε τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ που είναι συμπληρωματικός του $W_1$.

# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (ΕΜ 111)

## ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ 6ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

### ΑΣΚΗΣΗ 1

$$\alpha)\quad A=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&2\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{matrix}2\ \ 1\\ \leftarrow(-)\\ \\ \leftarrow(-)\end{matrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ 1\\ \leftarrow(-)\\ \\ \end{matrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=U$$

$r(A)=$ [πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U$] $\Rightarrow r(A)=2$

Άρα: $\dim R(A)=\dim R(A^T)=r(A)=2$

και $\dim N(A)=n-r(A)=3-2=1$

$\dim N(A^T)=m-r(A)=4-2=2$

όπου $\begin{cases}R(A)=\text{χώρος στηλών του } A\\ R(A^T)=\text{χώρος γραμμών του } A\\ N(A)=\text{μηδενόχωρος του } A\\ N(A^T)=\text{αριστερός μηδενόχωρος του } A\end{cases}$

{μία βάση του $R(A)$} = {στήλες του $A$ που αντιστοιχούν στις στήλες του $U$ με τους οδηγούς} = {1η, 2η στήλη του $A$} = $\{(1,2,0,1),\ (0,1,1,0)\}$

{μία βάση του $R(A^T)$} = {οι μη-μηδενικές γραμμές του $U$} = {1η, 2η γραμμή του $U$}

$= \{(1,0,1),\ (0,1,0)\}$

$$AX=0\Leftrightarrow UX=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}v=0\\u+w=0\Leftrightarrow u=-w\\ \quad w\in\mathbb{R}\end{cases}$$

δηλ. $\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-w\\0\\w\end{bmatrix}=w\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\quad w\in\mathbb{R}$

δηλ. {μία βάση του $N(A)$} = $\{(-1,0,1)\}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ \leftarrow (-) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_2$$

$$A^T X = 0 \Leftrightarrow U_2 X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v + w = 0 \Leftrightarrow v = -w \\ u + 2v + z = 0 \Leftrightarrow u = -2v - z \Rightarrow u = 2w - z \\ w, z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Άρα: $$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2w - z \\ -w \\ w \\ z \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad w, z \in \mathbb{R}$$

Δηλ. $\{$μία βάση του $N(A^T)\} = \{(2, -1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$

<u>Σημείωση</u>: Εναλλακτικά $\{$μία βάση του $N(A^T)\} = \{m - r(A) = 2$ τελευταίες γραμμές του πίνακα $L^{-1}P$ της απαλοιφής Gauss για τον $A\}$. Σ' αυτήν την περίπτωση έπρεπε να έχουμε υπολογίσει μαζί με τον $U$ και τον $L^{-1}P$.

Δηλ. $$\left[ \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A} \; \middle| \; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_4} \right] \begin{matrix} 2 \quad 1 \\ \leftarrow (-) \\ \\ \leftarrow (-) \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\rightarrow \left[ \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \; \middle| \; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right] \begin{matrix} \\ 1 \\ \leftarrow (-) \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \left[ \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{U} \; \middle| \; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{L^{-1}} \right]$$

Ενώ $P = I_4$ (αφού δεν χρειάστηκε καμία μετάθεση)

Άρα: $\{$μία βάση του $N(A^T)\} = \{2$ τελευταίες γραμμές του $L^{-1}P = L^{-1}\} = \{(2, -1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$

$$\beta)\quad \left[\underbrace{\begin{matrix}0&2&3&0\\0&6&9&0\end{matrix}}_{A}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}}_{I_2}\right]\begin{matrix}3\\ \leftarrow(-)\end{matrix} \rightarrow \left[\underbrace{\begin{matrix}0&2&3&0\\0&0&0&0\end{matrix}}_{U}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}1&0\\-3&1\end{matrix}}_{L^{-1}}\right]$$

ενώ $P=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ (δεν χρειάστηκε μετάθεση)

$r(A) = [$πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U] = 1$

$\dim R(A) = \dim R(A^T) = r(A) = 1$

$\dim N(A) = n - r(A) = 4-1 = 3$

$\dim N(A^T) = m - r(A) = 2-1 = 1$

$\{$μία βάση του $R(A)\} = \{$στήλες του $A$ που αντιστοιχούν στις στήλες του $U$ με οδηγούς$\} =$

$= \{2$η στήλη του $A\} = \{(2,6)\}$

$\{$μία βάση του $R(A^T)\} = \{$οι μη-μηδενικές γραμμές του $U\} = \{1$η γραμμή του $U\} =$

$= \{(0,2,3,0)\}$

$$AX=0 \Leftrightarrow UX=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}0&2&3&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}2v+3w=0 \Leftrightarrow v=-\frac{3}{2}w\\ u,w,z\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Δηλ. $$\begin{bmatrix}u\\v\\w\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u\\-3/2\,w\\w\\z\end{bmatrix} = u\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + w\begin{bmatrix}0\\-3/2\\1\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},\quad u,w,z\in\mathbb{R}$$

Άρα, $\{$βάση του $N(A)\} = \{(1,0,0,0),\ (0,-\frac{3}{2},1,0),\ (0,0,0,1)\}$

$\{$μία βάση του $N(A^T)\} = \{m-r(A)=1$ τελευταία γραμμή του $L^{-1}P = L^{-1}\} =$

$= \{(-3,1)\}$

$$\gamma)\quad \left[\underbrace{\begin{matrix}1&-2&0&0\\-3&0&4&6\\-2&1&3&0\end{matrix}}_{A}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}_{I_3}\right]\begin{matrix}(-3)\quad(-2)\\ \leftarrow(-)\\ \leftarrow(-)\end{matrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc}1&-2&0&0&1&0&0\\0&-6&4&6&3&1&0\\0&-3&3&0&2&0&1\end{array}\right]\begin{matrix}\\1/2\ \rightarrow\\ \leftarrow(-)\end{matrix}$$

$$\rightarrow \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{matrix}}_{U} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{matrix}}_{L^{-1}}\right] \quad \text{και} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (καμία μετάθεση)

$r(A) = [$πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U] = 3$

Άρα: $\dim R(A) = \dim R(A^T) = r(A) = 3$

$\dim N(A) = n - r(A) = 4 - 3 = 1$

$\dim N(A^T) = m - r(A) = 3 - 3 = 0$ και επομένως $N(A^T) = \{(0,0,0)\}$

(δηλ. $A^T x = 0$ δεν έχει μη-μηδενικές λύσεις) και $\nexists$ βάση του $N(A^T)$

$\{$μία βάση του $R(A)\} = \{$στήλες του $A$ που αντιστοιχούν στις στήλες του $U$ με τους οδηγούς$\}$

$= \{1$η, 2η, 3η στήλη του $A\} = \{(1,0,0), (-2,-6,0), (0,4,1)\}$

<u>Σημείωση</u>: επειδή γενικά $R(A) \subseteq \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^3$ και $\dim R(A) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, συνεπάγεται ότι $R(A) = \mathbb{R}^3$, άρα, κατευθείαν, μία βάση είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ δηλ. $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

$\{$μία βάση του $R(A^T)\} = \{$οι μη-μηδενικές γραμμές του $U\} = \{$όλες οι γραμμές του $U\}$

$= \{(1,-2,0,0), (0,-6,4,6), (0,0,1,-3)\}$

$$AX = 0 \Leftrightarrow UX = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w - 3z = 0 \Leftrightarrow w = 3z \\ -6v + 4w + 6z = 0 \Leftrightarrow v = \frac{2}{3}w + z \Rightarrow v = 3z \\ u - 2v = 0 \Leftrightarrow u = 2v \Rightarrow u = 6z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Άρα: } \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6z \\ 3z \\ 3z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{με } z \in \mathbb{R}$$

και $\{$μία βάση του $N(A)\} = \{(6,3,3,1)\}$

δ)

$$\left[\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}0&0&3\\0&0&4\\4&3&2\\1&-1&5\end{matrix}}_{A} & \underbrace{\begin{matrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{matrix}}_{I_4}\end{array}\right]\begin{matrix}\leftarrow\\ \\ \leftarrow\\ \\ \end{matrix} \xrightarrow{\text{εναλλαγή}} \left[\begin{array}{ccc|c}4&3&2& \\0&0&4& \underbrace{\begin{matrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{matrix}}_{P_{13}}\\0&0&3& \\1&-1&5& \end{array}\right]\begin{matrix}1/4\\ \\ \\ \leftarrow(-)\end{matrix}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|cccc}4&3&2&0&0&1&0\\0&0&4&0&1&0&0\\0&0&3&1&0&0&0\\0&-\frac{7}{4}&9/2&0&0&-1/4&1\end{array}\right]\begin{matrix} \\ \leftarrow\\ \\ \leftarrow\end{matrix} \xrightarrow[2,4]{\text{εναλλαγή}} \left[\begin{array}{ccc|cccc}4&3&2&0&0&1&0\\0&-7/4&9/2&0&0&-1/4&1\\0&0&3&1&0&0&0\\0&0&4&0&1&0&0\end{array}\right]\begin{matrix} \\ \\ 4/3\\ \leftarrow(-)\end{matrix}$$

$$\to \left[\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}4&3&2\\0&-7/4&9/2\\0&0&3\\0&0&0\end{matrix}}_{U} & \underbrace{\begin{matrix}0&0&1&0\\0&0&-1/4&1\\1&0&0&0\\-4/3&1&0&0\end{matrix}}_{L^{-1}P}\end{array}\right]$$

<u>Σημείωση</u>: Αν θέλαμε να βρούμε το $L^{-1}$ (δεν χρειάζεται εδώ), τότε αρκεί να πολλ/σουμε αριστερά με $P^{-1}$ δηλ. $L^{-1}=(L^{-1}P)P^{-1}=$
$=(L^{-1}P)(P_{24}P_{13})^{-1}=(L^{-1}P)P_{13}^{-1}P_{24}^{-1}=$
$=(L^{-1}P)P_{13}P_{24}$ (δηλ. εναλλαγή 1 με 3 στήλη και μετά 2 με 4 στήλη του $L^{-1}P$)

$r(A)=$ [πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U$] $=3$

$\dim R(A)=\dim R(A^T)=r(A)=3$

$\dim N(A)=n-r(A)=3-3=0$, άρα $N(A)=\{(0,0,0)\}$

(δηλ. $Ax=0$ έχει μόνο τη μηδενική λύση $x=(0,0,0)$) και $\nexists$ βάση του $N(A)$

$\dim N(A^T)=m-r(A)=4-3=1$

{μία βάση του $R(A)$} = {στήλες του $A$ που αντιστοιχούν στις στήλες του $U$ με τους οδηγούς} = {1η, 2η, 3η στήλη του $A$} =
$=\{(0,0,4,1),(0,0,3,-1),(3,4,2,5)\}$

[Εναλλακτικά, αφού $Ax=0$ έχει <u>μόνο</u> τη λύση $x=(0,0,0)$, οι στήλες του $A$ είναι γρ. ανεξάρτητες και άρα αποτελούν βάση του $R(A)$.]

{μία βάση του $R(A^T)$} = {οι μη-μηδενικές γραμμές του $U$} =
$=\{(4,3,2),(0,-\frac{7}{4},9/2),(0,0,3)\}$

{μία βάση του $N(A^T)$} = {$m-r(A)=1$ τελευταία γραμμή του $L^{-1}P$} $=\{(-\frac{4}{3},1,0,0)\}$

# ΑΣΚΗΣΗ 2

Έστω $A=(\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B=(b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times p}$

α) $AB=0 \Rightarrow$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}}_{m\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}}_{n\times p} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{m\times p}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1p} \\ b_{2p} \\ \vdots \\ b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{ Ab_1=0,\ Ab_2=0,\ \ldots, Ab_p=0 \}$, δηλαδή κάθε στήλη $b_1, b_2, .., b_p$ του $B$ είναι λύση του ομογενούς συστήματος $AX=0$ και επομένως $R(B) \subseteq N(A)$ (1)

β) $AB=0 \Rightarrow (AB)^T=0 \Rightarrow B^TA^T=0$, οπότε σύμφωνα με τη σχέση (1), $R(A^T) \subseteq N(B^T)$ δηλ. το ζητούμενο.

## ΑΣΚΗΣΗ 3

$$\{AX=b \text{ επιλύσιμο}\} \Leftrightarrow \{b \in R(A)\} \Leftrightarrow R(A') = R(A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dim R(A') = \dim R(A) \Leftrightarrow r(A') = r(A)$$

## ΑΣΚΗΣΗ 4

Έστω $[\alpha \ \ b \ \ c]$ ο ζητούμενος 1x3 πίνακας. Έχουμε:

$$[\alpha \ \ b \ \ c]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha x + by + cz = 0$$

άρα για $[\alpha \ \ b \ \ c] = [1 \ \ 2 \ \ 4]$ έχουμε ότι ο μηδενόχωρος του $[1 \ \ 2 \ \ 4]$ αποτελείται από τα διανύσματα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ για τα οποία $x + 2y + 4z = 0$.

Ένας πίνακας 3x3 με γραμμές πολλαπλάσια του $[1 \ \ 2 \ \ 4]$ έχει τον ίδιο μηδενόχωρο (αφού σ' αυτήν την περίπτωση οι 3 εξισώσεις του συστήματος $AX=0$ έχουν τις ίδιες λύσεις, οπότε το σύνολο λύσεων καθεμίας ταυτίζεται με το σύνολο λύσεων του συστήματος)

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$

## ΑΣΚΗΣΗ 5

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\{AX=b \text{ έχει πάντοτε μια λύση τουλάχιστον}\} \text{ ανν } \{AX=b \text{ έχει λύση } \forall\ b \in \mathbb{R}^m\} \Leftrightarrow \{R(A) = \mathbb{R}^m\} \Leftrightarrow \{\dim R(A) = m\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r(A) = m \Leftrightarrow \underbrace{\dim N(A^T)}_{m-r(A)} = 0 \Leftrightarrow N(A^T) = \{(0, 0, \dots, 0)\} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \{ A^T y = 0$ έχει τη μοναδική λύση $y = (0, 0, \ldots, 0) \}$

# ΑΣΚΗΣΗ 6

α) Έστω πίνακας 3Χ3: $\Gamma = [V_1 \ V_2 \ V_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \leftarrow (-) \\ \phantom{0} \end{matrix} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Δηλ. $V = R(\Gamma)$, οπότε $\dim V = \dim R(\Gamma) = r(\Gamma) =$

$= [$πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U] = 2$

$\{$μία βάση του $V\} = \{$βάση του $R(\Gamma)\} = \{$στήλες του $\Gamma$ που αντιστοιχούν σε στήλες του $U$ με οδηγούς$\} = \{1_η, 2_η$ στήλη του $\Gamma\} =$

$= \{(1,1,0), (1,2,0)\} = \{V_1, V_2\}$

β) $R(A^T) = R(\Gamma)$. Αρκεί ο $A^T$ να έχει στήλες που να παράγονται από τα $V_1, V_2$. Παράδειγμα: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow V_1 + V_2 \\ \leftarrow 2V_1 + 0V_2 \\ \leftarrow 0V_1 + 4V_2 \end{matrix}$

γ) $N(B) = V \Leftrightarrow N(B) = R(\Gamma) \Leftrightarrow N(B) = \{ V \in \mathbb{R}^3 \mid V = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2, \lambda_i \in \mathbb{R},$ με $i \in \{1,2\} \}$

Άρα, αν $(x,y,z) \in N(B)$, τότε:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως, αν $[\alpha \ b \ c]$ είναι μια γραμμή του $B \in \mathbb{R}^{m \times 3}$, θα πρέπει $[\alpha \ b \ c] \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \forall \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

δηλ. $\alpha(\lambda_1+\lambda_2) + b(\lambda_1+2\lambda_2)=0 \Leftrightarrow \lambda_1(\alpha+b)+\lambda_2(\alpha+2b)=0$

$\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

άρα: $\left.\begin{matrix}\alpha+b=0\\ \alpha+2b=0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\alpha=0\\ b=0\end{matrix}\right.$

Άρα κάθε γραμμή του $B \in \mathbb{R}^{m\times 3}$ πρέπει να είναι της μορφής

$[0\ \ 0\ \ c] = c\,[0\ \ 0\ \ 1]$ , όπου $c \in \mathbb{R}$

π.χ. $B = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$

<u>Εναλλακτικά</u>, επειδή $\forall\ B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ έχουμε: $N(B) + R(B^T) =$
$= N(B) \oplus R(B^T) = \mathbb{R}^n$, και στο συγκεκριμένο παράδειγμα
$N(B) \oplus R(B^T) = \mathbb{R}^3 \Rightarrow R(\Gamma) \oplus R(B^T) = \mathbb{R}^3$
δηλ. ο $R(B^T)$ είναι συμπληρωματικός του $R(\Gamma)$ ο οποίος παράγεται από τα $v_1, v_2$ και παριστάνει το επίπεδο $z=0$ κάθετο στον άξονα $z$ σε ένα $(x, y, z)$ σύστημα συντεταγμένων. Άρα ο $R(B^T)$ πρέπει να παριστάνει την ευθεία κάθετη στο $z=0$ που περνά από το $(0,0,0)$, δηλ. $R(B^T)$ παριστάνει τα σημεία πάνω στον άξονα $z$. Επομένως, $R(B^T) =$
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus x=y=0\}$. Δηλ. οι γραμμές του $B$ θα είναι της μορφής $[0\ \ 0\ \ z]$ με $z \in \mathbb{R}$.

## ΑΣΚΗΣΗ 7

Εξ' ορισμού $U + W = \{v \in V \setminus v = u + w,\ \text{με}\ u \in U,\ w \in W\}$

δηλ. $U + W \subseteq V$

Έστω $v_1, v_2 \in (U + W)$ δηλ. $v_1 = u_1 + w_1$ , $v_2 = u_2 + w_2$ με $w_1, w_2 \in W$ και $u_1, u_2 \in U$. Τότε:

$$v_1 + v_2 = u_1 + w_1 + u_2 + w_2 = \underbrace{(u_1+u_2)}_{u \in U} + \underbrace{(w_1+w_2)}_{w \in W}$$

($U$, $W$ κλειστοί ως προς πρόσθεση μιας και είναι διανυσματ. υπόχωροι του $V$)

Άρα $v_1 + v_2 \in (U + W)$, $\forall$ $v_1, v_2 \in (U + W)$. Δηλαδή το σύνολο $(U + W)$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.

Έστω $\lambda \in \mathbb{F}$. Τότε $\lambda v_1 = \lambda(u_1 + w_1) = \underbrace{\lambda u_1}_{\in U} + \underbrace{\lambda w_1}_{\in W}$

όπου $\lambda u_1 \in U$ και $\lambda w_1 \in W$, μιας και $U, W$ είναι κλειστοί ως προς το βαθμωτό πολ/σμό ως διανυσματικοί υπόχωροι του $V$. Άρα $\lambda v_1$ είναι επίσης άθροισμα των $\lambda u_1 \in U$ και $\lambda w_1 \in W$, δηλ. $\lambda v_1 \in (U+W)$ $\forall$ $v_1 \in (U + W)$. Δηλαδή το σύνολο $(U+W)$ είναι κλειστό και ως προς το βαθμωτό πολ/σμό και επομένως είναι διανυσματικός υπόχωρος του $V$.

## ΑΣΚΗΣΗ 8

**1η περίπτωση:** $U \cap W \neq \{0\}$

Έστω $\{v_1, v_2, \dots, v_\ell\}$ βάση του $U \cap W$. Άρα, $\dim(U \cap W) = \ell$

Ως διανύσματα βάσης, τα $v_1, v_2, \dots, v_\ell$ είναι γρ. ανεξάρτητα διανύσματα τόσο του $U$ όσο και του $W$, οπότε το $\{v_1, v_2, \dots, v_\ell\}$ μπορεί να επεκταθεί σε $\{v_1, v_2, \dots, v_\ell, u_1, u_2, \dots, u_t\}$ βάση του $U$, και σε $\{v_1, v_2, \dots, v_\ell, w_1, w_2, \dots, w_s\}$ βάση του $W$.

Άρα, $\dim U = \ell + t$ , $\dim W = \ell + s$

Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\mathbb{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_\ell, u_1, u_2, \dots, u_t, w_1, w_2, \dots, w_s\}$ είναι βάση του $U + W$, οπότε $\dim(U+W) = \ell + t + s = (\ell + t) + (\ell + s) - \ell =$ $= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$ που είναι και το ζητούμενο.

Έχουμε: έστω $v \in (U + W)$ με $v = u + w$ , $u \in U$, $w = W$

Άρα, $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_\ell v_\ell + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_t u_t$

και $w = \lambda_1' v_1 + \lambda_2' v_2 + \dots + \lambda_\ell' v_\ell + \mu_1' w_1 + \mu_2' w_2 + \dots + \mu_s' w_s$

με $\lambda_i, \mu_i, \lambda_i', \mu_i' \in \mathbb{F}$ , $\forall$ $i$

Επομένως: $v = u + w = (\lambda_1 + \lambda_1')v_1 + (\lambda_2 + \lambda_2')v_2 + \dots + (\lambda_\ell + \lambda_\ell')v_\ell + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots$

$\ldots + \mu_t u_t + \mu_1' w_1 + \mu_2' w_2 + \ldots + \mu_s' w_s$

Άρα, $v \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_e, u_1, u_2, \ldots, u_t, w_1, w_2, \ldots, w_s \rangle \quad \forall\ v \in (U+W)$

και επομένως $\langle v_1, v_2, \ldots, v_e, u_1, u_2, \ldots, u_t, w_1, w_2, \ldots, w_s \rangle = U + W$

Αρκεί να δείξουμε ότι επιπλέον τα διανύσματα αυτά είναι γρ. ανεξάρτητα.

Έστω $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_e v_e + \lambda_1' u_1 + \lambda_2' u_2 + \ldots + \lambda_t' u_t + \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \ldots + \mu_s w_s = 0$ με $\lambda_i, \lambda_i', \mu_i \in \mathbb{F}, \ \forall\ i$

$$\Rightarrow \underbrace{\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \ldots + \mu_s w_s}_{\in W} = \underbrace{(-\lambda_1)v_1 + \ldots + (-\lambda_e)v_e + (-\lambda_1')u_1 + \ldots + (-\lambda_t')u_t}_{\in U}$$

Άρα το $w = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \ldots + \mu_s w_s \in (U \cap W)$

οπότε $\exists\ \mu_1', \mu_2', \ldots, \mu_e' \in \mathbb{F}$, τέτοια ώστε:

$$w = \mu_1' v_1 + \mu_2' v_2 + \ldots + \mu_e' v_e \Rightarrow \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \ldots + \mu_s w_s =$$

$$= \mu_1' v_1 + \mu_2' v_2 + \ldots + \mu_e' v_e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_1' v_1 + \mu_2' v_2 + \ldots + \mu_e' v_e + (-\mu_1) w_1 + (-\mu_2) w_2 + \ldots + (-\mu_s) w_s = 0$$

Όμως $v_1, v_2, \ldots v_e, w_1, w_2, \ldots, w_s$ γρ. ανεξάρτητα αφού είναι βάση του $W$

οπότε: $\mu_1' = \mu_2' = \ldots = \mu_e' = \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_s = 0$

Άρα $w = 0 \Rightarrow (-\lambda_1)v_1 + \ldots + (-\lambda_e)v_e + (-\lambda_1')u_1 + \ldots + (-\lambda_t')u_t = 0$

Αλλά, $v_1, v_2, \ldots, v_e, u_1, u_2, \ldots, u_t$ γρ. ανεξάρτητα αφού είναι βάση του $U$

οπότε: $\lambda_1 = \ldots = \lambda_e = \lambda_1' = \ldots = \lambda_t' = 0$

Επομένως, συνολικά: $\lambda_i = \lambda_i' = \mu_i = 0 \quad \forall\ i$

Άρα, τα διανύσματα του συνόλου $\mathbb{B}$ είναι γρ. ανεξάρτητα

### 2η περίπτωση: $U \cap W = \{0\}$

Έστω $\{u_1, u_2, \ldots, u_t\}$ βάση του $U$ και $\{w_1, w_2, \ldots, w_s\}$ βάση του $W$.

Ομοίως με την 1η περίπτωση, μπορούμε να δείξουμε ότι το σύνολο $\{u_1, u_2, \ldots, u_t, w_1, w_2, \ldots, w_s\}$ είναι βάση του $U+W$, οπότε:

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \cancelto{0}{\dim(U \cap W)}$$

# ΑΣΚΗΣΗ 9

α) Έστω $A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&2\\-1&3\end{bmatrix}$ δηλ. $W_1 = R(A)$

έχουμε: $\begin{bmatrix}1&1\\-1&2\\-1&3\end{bmatrix}\begin{matrix}(-1)\ \ (-1)\\ \leftarrow_{(-)}\\ \leftarrow_{(-)}\end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1&1\\0&3\\0&4\end{bmatrix}\begin{matrix}4/3\\ \leftarrow_{(-)}\end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1&1\\0&3\\0&0\end{bmatrix} = U$

Άρα: $\dim W_1 = \dim R(A) = \dim R(U) = 2 = r(A)$

$\{$βάση του $W_1\} = \{$βάση του $R(A)\} = \{$στήλες του $A$ που αντιστοιχούν στις στήλες του $U$ με οδηγούς$\} = \{$όλες οι στήλες του $A\} =$

$= \{(1,-1,-1),(1,2,3)\}$

Το μη-μηδενικό διάνυσμα $(5,1,3)$ που παράγει το $W_2$ είναι γρ. ανεξάρτητο (όπως κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα μόνο του) και άρα $\{$βάση του $W_2\} = \{(5,1,3)\}$

β) Έστω $v_1=(1,-1,-1)$, $v_2=(1,2,3)$, $v_3=(5,1,3)$

$W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \setminus (x,y,z) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \mu v_3 \ , \ \lambda_1,\lambda_2,\mu \in \mathbb{R}\}$

Έχουμε: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \mu v_3 \Leftrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - \mu v_3 = 0 \underset{\overset{\uparrow}{\mu=-\lambda_3}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$

Άρα $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$ ανν $\{\exists\ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \neq (0,0,0)\}$

δηλ. ανν $\{v_1, v_2, v_3$ γρ. εξαρτημένα$\}$

Έστω $B = \begin{bmatrix}1&1&5\\-1&2&1\\-1&3&3\end{bmatrix}\begin{matrix}(-1)\ \ (-1)\\ \leftarrow_{(-)}\\ \leftarrow_{(-)}\end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1&1&5\\0&3&6\\0&4&8\end{bmatrix}\begin{matrix}4/3\\ \leftarrow_{(-)}\end{matrix} \rightarrow$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_B$$

$\dim N(B) = n - r(B) = 3 - 2 = 1 \neq 0$

Άρα $\exists\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$ τ.ω. $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 = 0$

δηλ. $V_1, V_2, V_3$ γρ. εξαρτημένα, οπότε $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$

Έχουμε επίσης ότι $V_1, V_2$ γρ. ανεξάρτητα, ενώ $V_1, V_2, V_3$ γρ. εξαρτημένα, άρα $V_3 \in \langle V_1, V_2 \rangle \Rightarrow V_3 \in W_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (βάση του $W_2$) $\in W_1 \underset{W_2 \neq W_1}{\overset{}{\Rightarrow}} W_2 \subset W_1 \Longrightarrow W_1 \cap W_2 = W_2$

γ) $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) =$

$= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_2 = \dim W_1 = 2$

δ) Έστω $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ δηλ. $W_1 = R(\Gamma^T)$

Επίσης, $R(\Gamma^T) \oplus N(\Gamma) = \mathbb{R}^3 \Rightarrow W_1 \oplus N(\Gamma) = \mathbb{R}^3$

δηλ. ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που είναι συμπληρωματικός του $W_1$ είναι ο $N(\Gamma)$.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \overset{1}{\underset{(-)}{\leftarrow}} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} = U_\Gamma$$

$$\Gamma X = 0 \Leftrightarrow U_\Gamma X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3v + 4w = 0 \Leftrightarrow v = -\frac{4}{3}w \\ u - v - w = 0 \Leftrightarrow u = v + w \Rightarrow u = -\frac{1}{3}w \\ w \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Άρα: $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1/3)w \\ (-4/3)w \\ w \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} -1/3 \\ -4/3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\{$Βάση του $N(\Gamma)\} = \{(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 1)\}$