ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Γραμμική Άλγεβρα & Αναλυτική Γεωμετρία» (ΕΜ111) – Χειμερινό Εξάμηνο 2008-2009

Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

6^{O} ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του χώρου στηλών και του μηδενόχωρου των επόμενων πινάκων:

$$\alpha)\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix},\qquad \beta)\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\qquad \gamma)\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\qquad \delta)\begin{bmatrix}-1 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 2 & 8 & 1\\ -1 & 3 & 6 & 2\end{bmatrix}$$

Ποια είναι η τάξη κάθε πίνακα;

Άσκηση 2: Βρείτε την παραγοντοποίηση LU σε κάτω τριγωνικό πίνακα *L* και σε πίνακα *U* με κλιμακωτή μορφή, για το πίνακα $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Ποια είναι η τάξη του *A*; Επίσης, προσδιορίστε τις βασικές και τις ελεύθερες μεταβλητές του συστήματος $A\vec{x}=\vec{0}$. Βρείτε τη γενική λύση του ομογενούς συστήματος. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{b}$, έτσι ώστε το μη-ομογενές σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ να έχει λύση. Είναι αυτή η λύση μοναδική; Αλλάξτε κατάλληλα το στοιχείο $\left(A\right)_{34}$ έτσι ώστε το $A\vec{x}=\vec{b}$ να έχει λύση $\forall\,\vec{b}\in\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 3: Προσδιορίστε την κλιμακωτή μορφή *U*, τις βασικές μεταβλητές, τις ελεύθερες μεταβλητές και τη γενική λύση του ομογενούς συστήματος $A\vec{x}=\vec{0}$, για

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 8 & 0\end{bmatrix}.$$

Ποια είναι η τάξη του πίνακα *A*; Βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{b}$, έτσι ώστε το μη-ομογενές σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ να έχει λύση. Σ' αυτήν την περίπτωση, γράψτε τη γενική λύση του $A\vec{x}=\vec{b}$ ως άθροισμα μιας ειδικής του λύσης και της γενικής λύσης του ομογενούς συστήματος.

Άσκηση 4: Εξετάστε αν είναι αληθείς ή ψευδείς οι προτάσεις: α) Ένας 5×8 πίνακας δεν έχει ποτέ γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες.

β) Αν οι στήλες ενός $m\times n$ πίνακα *A* είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, τότε το σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ έχει μια ακριβώς λύση $\forall\,\vec{b}\in\mathbb{R}^m$.

Άσκηση 5: Έστω εννέα διανύσματα $\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_9\in\mathbb{R}^7$. Επιλέξτε μια από τις εκφράσεις στις παρενθέσεις για να είναι αληθής καθεμία από τις επόμενες προτάσεις, αιτιολογώντας κάθε φορά την επιλογή σας:

α) Τα $\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_9$ (είναι) (δεν είναι) (μπορεί να είναι) γραμμικώς ανεξάρτητα.

β) Τα $\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_9$ (παράγουν) (δεν παράγουν) (μπορεί να παράγουν) τον $\mathbb{R}^7$.

γ) Εάν τα $\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_9$ είναι στήλες ενός πίνακα *A*, τότε το σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ (έχει) (δεν έχει) (μπορεί να μην έχει) λύση.

Άσκηση 6: Βρείτε τη διάσταση και μια βάση των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων για κάθε ένα από τους πίνακες:

$$\alpha)\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix},\qquad \beta)\begin{bmatrix}0 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 6 & 9 & 0\end{bmatrix},\qquad \gamma)\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 4 & 6\\ -2 & 1 & 3 & 0\end{bmatrix},\qquad \delta)\begin{bmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 4\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

Άσκηση 7: Αν το γινόμενο δύο πινάκων είναι ο μηδενικός πίνακας, δηλ. $AB=O$, δείξτε ότι α) ο χώρος στηλών του *B* περιέχεται στο μηδενόχωρο του *A*, και β) ο χώρος γραμμών του A περιέχεται στον αριστερό μηδενόχωρο του B.

Άσκηση 8: Εξηγήστε γιατί το σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ είναι επιλύσιμο, αν και μόνο αν $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A')$, όπου ο A' σχηματίζεται τοποθετώντας το $\vec{b}$ ως επιπλέον στήλη στον *A*.

Άσκηση 9: Βρείτε έναν 1×3 πίνακα του οποίου ο μηδενόχωρος αποτελείται από όλα τα διανύσματα (x,y,z) του $\mathbb{R}^3$ για τα οποία $x+2y+4z=0$. Βρείτε έναν 3×3 πίνακα με τον ίδιο μηδενόχωρο.

Άσκηση 10: Αν το $A\vec{x}=\vec{b}$ έχει πάντοτε μια τουλάχιστον λύση, δείξτε ότι η μόνη λύση του $A^T\vec{y}=\vec{0}$ είναι η $\vec{y}=\vec{0}$.

Άσκηση 11: Αν *V* είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα

$$\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\qquad \vec{v}_2=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\end{bmatrix},\qquad \vec{v}_3=\begin{bmatrix}1\\ 5\\ 0\end{bmatrix}$$

Βρείτε: α) τη διάσταση και μια βάση του *V*, β) έναν πίνακα *A* που έχει τον *V* ως χώρο γραμμών, και γ) έναν πίνακα *B* που έχει τον *V* ως μηδενόχωρο.

Άσκηση 12: Έστω *V* ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και *U*, *W* δύο διανυσματικοί υπόχωροι του *V*. Δείξτε ότι το άθροισμα $U+W$ είναι επίσης διανυσματικός υπόχωρος του *V*.

Άσκηση 13: Έστω *V* ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και *U*, *W* δύο διανυσματικοί υπόχωροι του *V*. Δείξτε ότι $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$.

Άσκηση 14: Δίνονται οι πραγματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$: $W_1=\langle(1,-1,-1),(1,2,3)\rangle$, και $W_2=\langle(5,1,3)\rangle$.

α) Βρείτε βάσεις των W_1 και W_2. β) Δείξτε ότι $W_1\cap W_2\neq\{\vec{0}\}$ και ότι $W_1\cap W_2=W_2$.

γ) Βρείτε το $\dim(W_1+W_2)$. δ) Βρείτε τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ που είναι συμπληρωματικός του W_1.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ & ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (ΕΜ-111)

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ 6ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

α) $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

$R(A)=\{(x,y) \setminus (x,y)=\lambda_1(2,-1)+\lambda_2(0,0),\ \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow R(A)=\{(x,y) \setminus (x,y)=\lambda(2,-1),\ \lambda\in\mathbb{R}\}$

Άρα $\dim R(A)=1$ και βάση το $\{(2,-1)\}$

Τάξη: $r(A)=\dim R(A)=1$

$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ \leftarrow(+)\end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=U$

Άρα $A\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ v\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=v\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}, \quad v\in\mathbb{R}$

Άρα βάση του $N(A)$ το $\{(0,1)\}$ και $\dim N(A)=1$

Επίσης, αντί για $r(A)=\dim R(A)=1$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την $r(A)=$[πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του U]$=1$

β) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=U$, άρα $r(A)=1$

Επομένως $\dim R(A)=r(A)=1$ και $\dim N(A)=n-r(A)=2-1=1$

$\{$Βάση του $R(A)\}=\{$στήλες του A που αντιστοιχούν σε στήλες του U με οδηγούς$\}=\{(1,0)\}$

$A\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v\\ v\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=v\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

Άρα: $\{$Βάση του $N(A)\}=\{(1,1)\}$

γ) $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=U$, άρα $r(A)=0$, $R(A)=\{(0,0)\}$

$\dim R(A)=r(A)=0$ και $\nexists$ βάση του $R(A)$

$\dim N(A)=n-r(A)=3-0=3$

Άρα $\left.\begin{cases}N(A)\subseteq\mathbb{R}^3\\ \dim N(A)=\dim\mathbb{R}^3\end{cases}\right\} \Rightarrow N(A)=\mathbb{R}^3$

π.χ. $\{$μια βάση του $N(A)\}=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

δ) $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 2 & 8 & 1\\ -1 & 3 & 6 & 2\end{bmatrix}\begin{matrix}(-1)\\ \\ \leftarrow(+)\end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}-1 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 2 & 8 & 1\\ 0 & 2 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ (-1)\\ \leftarrow(+)\end{matrix} \longrightarrow$

$\longrightarrow \begin{bmatrix}-1 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 2 & 8 & 1\\ 0 & 0 & -6 & -2\end{bmatrix}=U$, άρα $r(A)=3$

$\dim R(A)=r(A)=3$, $\dim N(A)=n-r(A)=4-3=1$

$\{$Βάση του $R(A)\}=\{$στήλες του A που αντιστοιχούν σε στήλες του U με οδηγούς$\}=\{$1η, 2η, 3η στήλη του $A\}$

$=\{(-1,0,-1),(1,2,3),(4,8,6)\}$

$A\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-1 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 2 & 8 & 1\\ 0 & 0 & -6 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-6w-2z=0 \Leftrightarrow w=-\frac{1}{3}z\\ 2v+8w-z=0 \Rightarrow 2v=z-8w \Rightarrow v=\frac{1}{2}\left(z+\frac{8}{3}z\right) \Rightarrow v=\frac{11}{6}z\\ -u+v+4w+3z=0 \Rightarrow u=\frac{11}{6}z+4\left(-\frac{1}{3}\right)z+3z \Rightarrow u=\frac{7}{2}z\end{cases}$$

Άρα: $\begin{bmatrix}u\\v\\w\\z\end{bmatrix} = z\begin{bmatrix}7/2\\11/6\\-1/3\\1\end{bmatrix}$, δηλ. $\{$βάση του $N(A)\} = \left\{\left(\frac{7}{2}, \frac{11}{6}, -\frac{1}{3}, 1\right)\right\}$

ΑΣΚΗΣΗ 2

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\ *&1&0\\ *&*&1\end{bmatrix} \;\vdots\; \begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&0\\1&2&0&1\end{bmatrix}\begin{matrix}(-1)\;\; 0\\ \leftarrow\!\rfloor_{(+)}\\ \leftarrow\!\rfloor_{(+)}\end{matrix} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}}_{L} \;\vdots\; \underbrace{\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}}_{U}$$

$r(A) = [$πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U] \Rightarrow$

$\Rightarrow r(A) = 2 \;\; = [$πλήθος βασικών μεταβλητών$]$

$[$πλήθος ελεύθ. μεταβλητών$] = n - r(A) = 4-2 = 2$

$$A\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow U\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad (1)$$

Βασικές μεταβλητές: u, v (αντιστοιχούν σε στήλες με οδηγούς)
Ελεύθερες >> : w, z (>> σε >> χωρίς >>)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} v + w = 0 \Leftrightarrow v = -w \\ u + 2v + z = 0 \Leftrightarrow u = -2v - z \Rightarrow u = 2w - z \end{cases}$$

Άρα: $\begin{bmatrix}u\\v\\w\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2w-z\\-w\\w\\z\end{bmatrix} = w\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

Το μη-ομογενές σύστημα $A\vec{X} = \vec{b}$ έχει λύση ανν $\vec{b} \in R(A)$

$[$μια βάση του $R(A)] = \{$στήλες του A που αντιστοιχούν σε στήλες του U με οδηγούς$\} = \{1$η, 2η στήλη του $A\} = \{(1,0,1), (2,1,2)\}$

Άρα $\{A\vec{X} = \vec{b}$ έχει λύση$\}$ ανν $\left\{\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\right.$ τ.ω. $\left.\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$

$[$πλήθος ελεύθ. μεταβλ.$] = n - r(A) = 4-2 \neq 0$, άρα η λύση δεν θα είναι μοναδική.

Το $A\vec{X} = \vec{b}$ έχει λύση $\forall\, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ανν $R(A) = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \dim R(A) = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r(A) = 3$. Αυτό θα ήταν αληθές αν π.χ. $(U)_{34} \neq 0 \Leftarrow (A)_{34} \neq 1$

π.χ. αν $(A)_{34} = 2$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

$$A = \begin{bmatrix}0&1&4&0\\0&2&8&0\end{bmatrix}\begin{matrix}(-2)\\ \leftarrow\!\rfloor_{(+)}\end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}0&1&4&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} = U$$

Άρα: $A\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow U\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}0&1&4&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad (1)$

Βασική μεταβλητή: v (αντιστοιχεί σε στήλη με οδηγό)
ελεύθερες μεταβλητές: u, w, z (αντιστοιχούν σε στήλες χωρίς οδηγό)

$(1) \Rightarrow v + 4w = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v = -4w}$

Άρα, γενική λύση του ομογενούς συστήματος:

$$\begin{bmatrix}u\\v\\w\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u\\-4w\\w\\z\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}u\\v\\w\\z\end{bmatrix} = u\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + w\begin{bmatrix}0\\-4\\1\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \quad u,w,z \in \mathbb{R}$$

$r(A) = [$πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U] = 1$

Το μη-ομογενές σύστημα έχει λύση ανν $\vec{b} \in R(A)$

$[$μια βάση του $R(A)] = \{$στήλες του A που αντιστοιχούν σε στήλες του U με οδηγούς$\}$
$= \{2$η στήλη του $A\} = \{(1,2)\}$

Άρα το $A\vec{X} = \vec{b}$ έχει λύση ανν $\vec{b} \in \langle(1,2)\rangle$ δηλ. ανν
$\vec{b} = (b_1, b_2)$ με $b_2 = 2b_1$

Σ' αυτήν την περίπτωση:

$$A\vec{X} = \vec{b} \Leftrightarrow U\vec{X} = \vec{c} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}0&1&4&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\0\end{bmatrix}$$

Αν οι ελεύθερες μεταβλητές είναι $u=w=z=0$, τότε παίρνουμε την ειδική λύση: $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, οπότε η γενική λύση

είναι: $\vec{X}_{γεν} = \vec{X}_{ειδ} + \vec{X}_{ομογ.} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

με $u, w, z \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

α) Έχουμε 8 στήλες $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_8 \in \mathbb{R}^5$. Όμως $\dim \mathbb{R}^5 = 5 =$ $=$ μέγιστο πλήθος γρ. ανεξάρτητων διανυσμάτων του $\mathbb{R}^5$.
Άρα 8 στήλες ενός 5Χ8 πίνακα είναι πάντα γρ. εξαρτημένες, και η πρόταση είναι αληθής

β) $\{n$ γρ. ανεξάρτητες στήλες$\} \Rightarrow \dim R(A) = n \Rightarrow r(A) = n \Rightarrow$
$\Rightarrow [$πλήθος ελεύθερων μεταβλητών$] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{μοναδική λύση αν } \vec{b} \in R(A) \\ \text{καμμία λύση αν } \vec{b} \notin R(A) \end{cases}$

Άρα, το σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ έχει μία ακριβώς λύση αν $\vec{b} \in R(A)$.
Για να ισχύει αυτό $\forall\ \vec{b} \in \mathbb{R}^m$ ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι $R(A) = \mathbb{R}^m$, άρα $\dim R(A) = m$, άρα $m = n$.
Δηλ. η πρόταση είναι αληθής $\forall\ \vec{b} \in \mathbb{R}^m$ μόνο όταν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ δηλ. $m = n$ (τετραγωνικός πίνακας).

ΑΣΚΗΣΗ 5

α) Τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_9$ δεν είναι γρ. ανεξάρτητα, γιατί $\dim \mathbb{R}^7 = 7 =$ $=$ μέγιστο πλήθος γρ. ανεξάρτητων διανυσμάτων του $\mathbb{R}^7$.

β) Τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_9 \in \mathbb{R}^7$ μπορεί να παράγουν τον $\mathbb{R}^7$, ανν 7 από αυτά είναι γρ. ανεξάρτητα.
Αν $<\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_9> = V \subseteq \mathbb{R}^7$ ο χώρος που παράγουν τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_9$, τότε $\dim V \leq 7$. Αν $\dim V = 7$ τότε $V = \mathbb{R}^7$ ενώ αν $\dim V < 7$ τότε $V \subset \mathbb{R}^7$ και τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_9$ δεν θα παράγουν τον $\mathbb{R}^7$

γ) Ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{7 \times 9}$ και επομένως $r(A) \leq 7$. Άρα $\dim R(A) \leq 7$
$\{A\vec{x} = \vec{b}$ έχει λύση$\}$ ανν $\{\vec{b} \in R(A) \subseteq \mathbb{R}^7\}$
Αν $\dim R(A) = 7$ τότε $R(A) = \mathbb{R}^7$ και το $A\vec{x} = \vec{b}$ έχει λύση $\forall\ \vec{b} \in \mathbb{R}^7$.
Αν $\dim R(A) < 7$, τότε $R(A) \subset \mathbb{R}^7$ οπότε $\exists\ \vec{b} \in \mathbb{R}^7$ για τα οποία το $A\vec{x} = \vec{b}$ δεν έχει λύση, και $\vec{b} \in \mathbb{R}^7$ για τα οποία το $A\vec{x} = \vec{b}$ έχει λύση.
Άρα, γενικά, το σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ μπορεί να μην έχει λύση

ΑΣΚΗΣΗ 6

α) $$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&2\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{matrix}(-2)\ (-1)\\ \leftarrow(+)\\ \\ \leftarrow(+)\end{matrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\\(-1)\\ \leftarrow(+)\\ \\ \end{matrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=U$$

$r(A)=$ [πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του U] $\Rightarrow r(A)=2$

Άρα: $\dim R(A)=\dim R(A^T)=r(A)=2$

και $\dim N(A)=n-r(A)=3-2=1$

$\dim N(A^T)=m-r(A)=4-2=2$

όπου
- $R(A)$ = χώρος στηλών του A
- $R(A^T)$ = χώρος γραμμών του A
- $N(A)$ = μηδενόχωρος του A
- $N(A^T)$ = αριστερός μηδενόχωρος του A

{μία βάση του $R(A)$} = {στήλες του A που αντιστοιχούν στις στήλες του U με τους οδηγούς} = {1η, 2η στήλη του A} = $\{(1,2,0,1),\ (0,1,1,0)\}$

{μία βάση του $R(A^T)$} = {οι μη-μηδενικές γραμμές του U} = {1η, 2η γραμμή του U} $=\{(1,0,1),\ (0,1,0)\}$

$$A\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow U\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}v=0\\u+w=0\Leftrightarrow u=-w\\ w\in\mathbb{R}\end{cases}$$

δηλ. $$\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-w\\0\\w\end{bmatrix}=w\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\quad w\in\mathbb{R}$$

δηλ. {μία βάση του $N(A)$} $=\{(-1,0,1)\}$

$$A^T=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&0\\1&2&0&1\end{bmatrix}\begin{matrix}(-1)\\ \\ \leftarrow(+)\end{matrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=U_2$$

$$A^T\vec{x}=0\Leftrightarrow U_2\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}v+w=0\Leftrightarrow v=-w\\u+2v+z=0\Leftrightarrow u=-2v-z\Rightarrow u=2w-z\\w,z\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Άρα: $$\begin{bmatrix}u\\v\\w\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2w-z\\-w\\w\\z\end{bmatrix}=w\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\quad w,z\in\mathbb{R}$$

Δηλ. {μία βάση του $N(A^T)$} $=\{(2,-1,1,0),\ (-1,0,0,1)\}$

<u>2ος Τρόπος:</u> {μία βάση του $N(A^T)$} = {$m-r(A)=2$ τελευταίες γραμμές του πίνακα $L^{-1}P$ της απαλοιφής Gauss για τον A}. Σ' αυτήν την περίπτωση έπρεπε να έχουμε υπολογίσει μαζί με τον U και τον $L^{-1}P$.

Δηλ. $$\left[\underbrace{\begin{matrix}1&0&1\\2&1&2\\0&1&0\\1&0&1\end{matrix}}_{A}\ \middle|\ \underbrace{\begin{matrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{matrix}}_{I_4}\right]\begin{matrix}(-2)\ (-1)\\ \leftarrow(+)\\ \\ \leftarrow(+)\end{matrix}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left[\begin{matrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\0&0&1&0\\-1&0&0&1\end{matrix}\right]\begin{matrix}\\(-1)\\ \leftarrow(+)\\ \\ \end{matrix}\longrightarrow\left[\underbrace{\begin{matrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix}}_{U}\ \middle|\ \underbrace{\begin{matrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\2&-1&1&0\\-1&0&0&1\end{matrix}}_{L^{-1}}\right]$$

Ενώ $P=I_4$ (αφού δεν χρειάστηκε καμία μετάθεση)

Άρα: {μία βάση του $N(A^T)$} = {2 τελευταίες γραμμές του $L^{-1}P=L^{-1}$} $=\{(2,-1,1,0),\ (-1,0,0,1)\}$

β) $$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \Big| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I_2} \begin{matrix} (-3) \\ \leftarrow (+) \end{matrix} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U} \Big| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{matrix}}_{L^{-1}}$$

ενώ $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (δεν χρειάστηκε μετάθεση)

$r(A) = [$πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U] = 1$

$\dim R(A) = \dim R(A^T) = r(A) = 1$

$\dim N(A) = n - r(A) = 4 - 1 = 3$

$\dim N(A^T) = m - r(A) = 2 - 1 = 1$

{μία βάση του $R(A)$} = {στήλες του A που αντιστοιχούν στις στήλες του U με οδηγούς} =
= {2η στήλη του A} = $\{(2,6)\}$

{μία βάση του $R(A^T)$} = {οι μη-μηδενικές γραμμές του U} = {1η γραμμή του U} =
= $\{(0,2,3,0)\}$

$$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v + 3w = 0 \Leftrightarrow v = -\frac{3}{2}w \\ u, w, z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

δηλ. $$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ -3/2\, w \\ w \\ z \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u, w, z \in \mathbb{R}$$

Άρα, {βάση του $N(A)$} = $\{(1,0,0,0), (0,-\frac{3}{2},1,0), (0,0,0,1)\}$

{μία βάση του $N(A^T)$} = {$m - r(A) = 1$ τελευταία γραμμή του $L^{-1}P = L^{-1}$} =
= $\{(-3,1)\}$

γ) $$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \Bigg| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3} \begin{matrix} 3 \quad 2 \\ \leftarrow (+) \\ \leftarrow (+) \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 6 & | & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & | & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-1/2) \\ \leftarrow (+) \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}}_{U} \Bigg| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{matrix}}_{L^{-1}}$$

και $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (καμία μετάθεση)

$r(A) = [$πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U] = 3$

Άρα: $\dim R(A) = \dim R(A^T) = r(A) = 3$
$\dim N(A) = n - r(A) = 4 - 3 = 1$
$\dim N(A^T) = m - r(A) = 3 - 3 = 0$ και επομένως $N(A^T) = \{(0,0,0)\}$
(δηλ. $A^T\vec{x} = \vec{0}$ δεν έχει μη-μηδενικές λύσεις) και ∄ βάση του $N(A^T)$

{μία βάση του $R(A)$} = {στήλες του A που αντιστοιχούν στις στήλες του U με τους οδηγούς}
= {1η, 2η, 3η στήλη του A} = $\{(1,0,0), (-2,-6,0), (0,4,1)\}$

<u>Σημείωση:</u> επειδή γενικά $R(A) \subseteq \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^3$ και $\dim R(A) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, συνεπάγεται ότι $R(A) = \mathbb{R}^3$, άρα, κατευθείαν, μία βάση είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ δηλ. $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

{μία βάση του $R(A^T)$} = {οι μη-μηδενικές γραμμές του U} = {όλες οι γραμμές του U}
= $\{(1,-2,0,0), (0,-6,4,6), (0,0,1,-3)\}$

$$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w - 3z = 0 \Leftrightarrow w = 3z \\ -6v + 4w + 6z = 0 \Leftrightarrow v = \frac{2}{3}w + z \Rightarrow v = 3z \\ u - 2v = 0 \Leftrightarrow u = 2v \Rightarrow u = 6z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Άρα: $$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6z \\ 3z \\ 3z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{με } z \in \mathbb{R}$$

και {μία βάση του $N(A)$} = $\{(6,3,3,1)\}$

δ)
$$\left[\underbrace{\begin{matrix}0&0&3\\0&0&4\\4&3&2\\1&-1&5\end{matrix}}_{A}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{matrix}}_{I_4}\right]\xrightarrow{\text{εναλλαγή}}\left[\begin{matrix}4&3&2\\0&0&4\\0&0&3\\1&-1&5\end{matrix}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{matrix}}_{P_{13}}\right]\begin{matrix}(-1/4)\\ \\ \\ (+)\end{matrix}$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|cccc}4&3&2&0&0&1&0\\0&0&4&0&1&0&0\\0&0&3&1&0&0&0\\0&-\frac{7}{4}&9/2&0&0&-1/4&1\end{array}\right]\xrightarrow[2,4]{\text{εναλλαγή}}\left[\begin{array}{ccc|cccc}4&3&2&0&0&1&0\\0&-7/4&9/2&0&0&-1/4&1\\0&0&3&1&0&0&0\\0&0&4&0&1&0&0\end{array}\right]\begin{matrix}\\ \\(-4/3)\\(+)\end{matrix}$$

$$\rightarrow\left[\underbrace{\begin{matrix}4&3&2\\0&-7/4&9/2\\0&0&3\\0&0&0\end{matrix}}_{U}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}0&0&1&0\\0&0&-1/4&1\\1&0&0&0\\-4/3&1&0&0\end{matrix}}_{L^{-1}P}\right]$$

<u>Σημείωση</u>: Αν θέλαμε να βρούμε το L^{-1} (δεν χρειάζεται εδώ), τότε αρκεί να πολ/ζουμε αριστερά με P^{-1} δηλ. $L^{-1}=(L^{-1}P)P^{-1}=$
$=(L^{-1}P)(P_{24}P_{13})^{-1}=(L^{-1}P)P_{13}^{-1}P_{24}^{-1}=$
$=(L^{-1}P)P_{13}P_{24}$ (δηλ. εναλλαγή 1ης με 3 στήλη και μετά 2 με 4 στήλη του $L^{-1}P$)

$r(A)=[$πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U]=3$

$\dim R(A)=\dim R(A^T)=r(A)=3$

$\dim N(A)=n-r(A)=3-3=0$, άρα $N(A)=\{(0,0,0)\}$

(δηλ. $A\vec{x}=\vec{0}$ έχει μόνο τη μηδενική λύση $\vec{x}=(0,0,0)$) και $\nexists$ βάση του $N(A)$

$\dim N(A^T)=m-r(A)=4-3=1$

$\{$μία βάση του $R(A)\}=\{$στήλες του A που αντιστοιχούν στις στήλες του U με τους οδηγούς$\}=\{1_η, 2_η, 3_η$ στήλη του $A\}=$
$=\{(0,0,4,1),(0,0,3,-1),(3,4,2,5)\}$

[Εναλλακτικά, αφού $A\vec{x}=\vec{0}$ έχει <u>μόνο</u> τη λύση $\vec{x}=(0,0,0)$, οι στήλες του A είναι γρ. ανεξάρτητες και άρα αποτελούν βάση του $R(A)$.]

$\{$μία βάση του $R(A^T)\}=\{$οι μη-μηδενικές γραμμές του $U\}=$
$=\{(4,3,2),(0,-\frac{7}{4},9/2),(0,0,3)\}$

$\{$μία βάση του $N(A^T)\}=\{m-r(A)=1$ τελευταία γραμμή του $L^{-1}P\}=\{(-\frac{4}{3},1,0,0)\}$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Έστω $A=(\alpha_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $B=(b_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times p}$

α) $AB=0 \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\dots&\alpha_{1n}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\dots&\alpha_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\alpha_{m1}&\alpha_{m2}&\dots&\alpha_{mn}\end{bmatrix}}_{m\times n}\underbrace{\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\dots&b_{1p}\\b_{21}&b_{22}&\dots&b_{2p}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\dots&b_{np}\end{bmatrix}}_{n\times p}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\dots&0\end{bmatrix}}_{m\times p}$

$$\Rightarrow\left\{\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\dots&\alpha_{1n}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\dots&\alpha_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\alpha_{m1}&\alpha_{m2}&\dots&\alpha_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}\\b_{21}\\\vdots\\b_{n1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\dots&\alpha_{1n}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\dots&\alpha_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\alpha_{m1}&\alpha_{m2}&\dots&\alpha_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{12}\\b_{22}\\\vdots\\b_{n2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\dots\right.$$

$$\left.\dots,\ \begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\dots&\alpha_{1n}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\dots&\alpha_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\alpha_{m1}&\alpha_{m2}&\dots&\alpha_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{1p}\\b_{2p}\\\vdots\\b_{np}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\{A\vec{b}_1=\vec{0},\ A\vec{b}_2=\vec{0},\ \dots, A\vec{b}_p=\vec{0}\}$, δηλαδή κάθε στήλη $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_p$ του B είναι λύση του ομογενούς συστήματος $A\vec{x}=\vec{0}$ και επομένως $R(B)\subseteq N(A)$ (1)

β) $AB=0 \Rightarrow (AB)^T=0 \Rightarrow B^TA^T=0$, οπότε σύμφωνα με τη σχέση (1), $R(A^T)\subseteq N(B^T)$ δηλ. το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ 8

$\{A\vec{x}=\vec{b}$ επιλύσιμο$\} \Leftrightarrow \{\vec{b}\in R(A)\} \Leftrightarrow R(A')=R(A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dim R(A') = \dim R(A) \Leftrightarrow r(A')=r(A)$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Έστω $[\alpha \ \ b \ \ c]$ ο ζητούμενος 1x3 πίνακας. Έχουμε:

$$[\alpha \ b \ c]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha x + by + cz = 0$$

άρα για $[\alpha \ \ b \ \ c] = [1 \ \ 2 \ \ 4]$ έχουμε ότι ο μηδενόχωρος του $[1 \ \ 2 \ \ 4]$ αποτελείται από τα διανύσματα $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ για τα οποία $x+2y+4z=0$.

Ένας πίνακας 3x3 με γραμμές πολλαπλάσια του $[1 \ \ 2 \ \ 4]$ έχει τον ίδιο μηδενόχωρο (αφού σ' αυτήν την περίπτωση οι 3 εξισώσεις του συστήματος $A\vec{x}=\vec{0}$ έχουν τις ίδιες λύσεις, οπότε το σύνολο λύσεων καθεμίας ταυτίζεται με το σύνολο λύσεων του συστήματος)

$$\text{π.χ.} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Έστω $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$

$\{A\vec{x}=\vec{b}$ έχει πάντοτε μια λύση τουλάχιστον$\}$ ανν $\{A\vec{x}=\vec{b}$ έχει λύση $\forall \ \vec{b}\in\mathbb{R}^m\} \Leftrightarrow \{R(A)=\mathbb{R}^m\} \Leftrightarrow \{\dim R(A)=m\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r(A)=m \Leftrightarrow \underbrace{\dim N(A^T)}_{m-r(A)}=0 \Leftrightarrow N(A^T)=\{(0,0,\dots,0)\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{A^T\vec{y}=\vec{0}$ έχει τη μοναδική λύση $\vec{y}=(0,0,\dots,0)\}$

ΑΣΚΗΣΗ 11

α) Έστω πίνακας 3x3: $\Gamma = [\vec{V}_1 \ \ \vec{V}_2 \ \ \vec{V}_3] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} (-1) \\ (+) \\ \ \end{array} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

δηλ. $V = R(\Gamma)$, οπότε $\dim V = \dim R(\Gamma) = r(\Gamma) =$

$= [$πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U] = 2$

$\{$μία βάση του $V\} = \{$βάση του $R(\Gamma)\} = \{$στήλες του Γ που αντιστοιχούν σε στήλες του U με οδηγούς$\} = \{1_η, 2_η$ στήλη του $\Gamma\} =$

$= \{(1,1,0), (1,2,0)\} = \{\vec{V}_1, \vec{V}_2\}$

β) $R(A^T) = R(\Gamma)$. Αρκεί ο A^T να έχει στήλες που να παράγονται από τα $\vec{V}_1, \vec{V}_2$. Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \\ \leftarrow 2\vec{V}_1 + 0\vec{V}_2 \\ \leftarrow 0\vec{V}_1 + 4\vec{V}_2 \end{array}$$

γ) $N(B) = V \Leftrightarrow N(B) = R(\Gamma) \Leftrightarrow N(B) = \{\vec{V}\in\mathbb{R}^3 \setminus \vec{V} = \lambda_1\vec{V}_1 + \lambda_2\vec{V}_2, \lambda_i\in\mathbb{R}$, με $i\in\{1,2\}\}$

Άρα, αν $(x,y,z)\in N(B)$, τότε:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1+\lambda_2 \\ \lambda_1+2\lambda_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως, αν $[\alpha \ \ b \ \ c]$ είναι μια γραμμή του $B\in\mathbb{R}^{m\times 3}$, θα πρέπει

$$[\alpha \ \ b \ \ c]\begin{bmatrix} \lambda_1+\lambda_2 \\ \lambda_1+2\lambda_2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad \forall \ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$$

δηλ. $\alpha(\lambda_1+\lambda_2)+b(\lambda_1+2\lambda_2)=0 \Leftrightarrow \lambda_1(\alpha+b)+\lambda_2(\alpha+2b)=0$
$\forall \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$

άρα: $\left.\begin{matrix}\alpha+b=0\\ \alpha+2b=0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ b=0\end{cases}$

Άρα κάθε γραμμή του $B\in\mathbb{R}^{m\times 3}$ πρέπει να είναι της μορφής
$[0 \quad 0 \quad c] = c\,[0 \quad 0 \quad 1]$, όπου $c\in\mathbb{R}$

π.χ. $B=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&4\end{bmatrix}$

<u>2ος Τρόπος:</u> επειδή $\forall\, B\in\mathbb{R}^{m\times n}$ έχουμε: $N(B)+R(B^T)=$
$=N(B)\oplus R(B^T)=\mathbb{R}^n$, και στο συγκεκριμένο παράδειγμα
$N(B)\oplus R(B^T)=\mathbb{R}^3 \Rightarrow R(\Gamma)\oplus R(B^T)=\mathbb{R}^3$
δηλ. ο $R(B^T)$ είναι συμπληρωματικός του $R(\Gamma)$ ο οποίος παράγεται από τα $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ και παριστάνει το επίπεδο $z=0$ κάθετο στον άξονα z
Άρα ο $R(B^T)$ πρέπει να παριστάνει την ευθεία κάθετη στο $z=0$ που περνά από το $(0,0,0)$, δηλ. $R(B^T)$ παριστάνει τα σημεία πάνω στον άξονα z. Επομένως, $R(B^T)=$
$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \setminus x=y=0\}$. Δηλ. οι γραμμές του B θα είναι της μορφής $[0 \quad 0 \quad z]$ με $z\in\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Εξ' ορισμού $U+W=\{\vec{v}\in V \setminus \vec{v}=\vec{u}+\vec{w}\text{, με } \vec{u}\in U, \vec{w}\in W\}$
δηλ. $U+W\subseteq V$
Έστω $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in(U+W)$ δηλ. $\vec{v}_1=\vec{u}_1+\vec{w}_1$, $\vec{v}_2=\vec{u}_2+\vec{w}_2$ με $\vec{w}_1,\vec{w}_2\in W$ και $\vec{u}_1,\vec{u}_2\in U$. Τότε:

$$\vec{v}_1+\vec{v}_2=\vec{u}_1+\vec{w}_1+\vec{u}_2+\vec{w}_2=\underbrace{(\vec{u}_1+\vec{u}_2)}_{\vec{u}\in U}+\underbrace{(\vec{w}_1+\vec{w}_2)}_{\vec{w}\in W}$$

(U, W κλειστοί ως προς πρόσθεση μιας και είναι διανυσματ. υπόχωροι του V)

Άρα $\vec{v}_1+\vec{v}_2\in(U+W)$, $\forall\,\vec{v}_1,\vec{v}_2\in(U+W)$. Δηλαδή το σύνολο $(U+W)$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.
Έστω $\lambda\in\mathbb{F}$. Τότε $\lambda\vec{v}_1=\lambda(\vec{u}_1+\vec{w}_1)=\underbrace{\lambda\vec{u}_1}_{\in U}+\underbrace{\lambda\vec{w}_1}_{\in W}$

όπου $\lambda\vec{u}_1\in U$ και $\lambda\vec{w}_1\in W$, μιας και U, W είναι κλειστοί ως προς το βαθμωτό πολλ/σμό ως διανυσματικοί υπόχωροι του V. Άρα $\lambda\vec{v}_1$ είναι επίσης άθροισμα των $\lambda\vec{u}_1\in U$ και $\lambda\vec{w}_1\in W$, δηλ. $\lambda\vec{v}_1\in(U+W)$ $\forall\,\vec{v}_1\in(U+W)$. Δηλαδή το σύνολο $(U+W)$ είναι κλειστό <u>και</u> ως προς το βαθμωτό πολλ/σμό και επομένως είναι διανυσματικός υπόχωρος του V.

ΑΣΚΗΣΗ 13

<u>1η περίπτωση</u>: $U\cap W\neq\{\vec{0}\}$
Έστω $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_\ell\}$ βάση του $U\cap W$. Άρα, $\dim(U\cap W)=\ell$
Ως διανύσματα βάσης, τα $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_\ell$ είναι γρ. ανεξάρτητα διανύσματα τόσο του U όσο και του W, οπότε το $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_\ell\}$ μπορεί να επεκταθεί σε $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_\ell,\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_t\}$ βάση του U, και σε $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_\ell,\vec{w}_1,\vec{w}_2,\dots,\vec{w}_s\}$ βάση του W.
Άρα, $\dim U=\ell+t$, $\dim W=\ell+s$
Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\mathbb{B}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_\ell,\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_t,\vec{w}_1,\vec{w}_2,\dots,\vec{w}_s\}$ είναι βάση του $U+W$, οπότε $\dim(U+W)=\ell+t+s=(\ell+t)+(\ell+s)-\ell=$
$=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$ που είναι και το ζητούμενο.
Έχουμε: έστω $\vec{v}\in(U+W)$ με $\vec{v}=\vec{u}+\vec{w}$, $\vec{u}\in U$, $\vec{w}=W$

Άρα, $\quad \vec{u}=\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\dots+\lambda_\ell\vec{v}_\ell+\mu_1\vec{u}_1+\mu_2\vec{u}_2+\dots+\mu_t\vec{u}_t$
και $\quad \vec{w}=\lambda_1'\vec{v}_1+\lambda_2'\vec{v}_2+\dots+\lambda_\ell'\vec{v}_\ell+\mu_1'\vec{w}_1+\mu_2'\vec{w}_2+\dots+\mu_s'\vec{w}_s$
με $\lambda_i,\mu_i,\lambda_i',\mu_i'\in\mathbb{F}$, $\forall\, i$

Επομένως: $\vec{v}=\vec{u}+\vec{w}=(\lambda_1+\lambda_1')\vec{v}_1+(\lambda_2+\lambda_2')\vec{v}_2+\dots+(\lambda_\ell+\lambda_\ell')\vec{v}_\ell+\mu_1\vec{u}_1+\mu_2\vec{u}_2+\dots$

$\ldots + \mu_t\vec{u}_t + \mu'_1\vec{w}_1 + \mu'_2\vec{w}_2 + \ldots + \mu'_s\vec{w}_s$

Άρα, $\vec{v} \in \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_\ell, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_t, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_s \rangle \quad \forall\ \vec{v} \in (U+W)$

και επομένως $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_\ell, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_t, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_s \rangle = U + W$

Αρκεί να δείξουμε ότι επιπλέον τα διανύσματα αυτά είναι γρ. ανεξάρτητα.

Έστω $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_\ell\vec{v}_\ell + \lambda'_1\vec{u}_1 + \lambda'_2\vec{u}_2 + \ldots + \lambda'_t\vec{u}_t + \mu_1\vec{w}_1 + \mu_2\vec{w}_2 + \ldots +$

$+ \mu_s\vec{w}_s = \vec{0}$ με $\lambda_i, \lambda'_i, \mu_i \in \mathbb{F}, \forall\ i$

$$\Rightarrow \underbrace{\mu_1\vec{w}_1 + \mu_2\vec{w}_2 + \ldots + \mu_s\vec{w}_s}_{\in W} = \underbrace{(-\lambda_1)\vec{v}_1 + \ldots + (-\lambda_\ell)\vec{v}_\ell + (-\lambda'_1)\vec{u}_1 + \ldots + (-\lambda'_t)\vec{u}_t}_{\in U}$$

Άρα το $\vec{w} = \mu_1\vec{w}_1 + \mu_2\vec{w}_2 + \ldots + \mu_s\vec{w}_s \in (U \cap W)$

οπότε $\exists\ \mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_\ell \in \mathbb{F}$, τέτοια ώστε:

$\vec{w} = \mu'_1\vec{v}_1 + \mu'_2\vec{v}_2 + \ldots + \mu'_\ell\vec{v}_\ell \Rightarrow \mu_1\vec{w}_1 + \mu_2\vec{w}_2 + \ldots + \mu_s\vec{w}_s =$

$= \mu'_1\vec{v}_1 + \mu'_2\vec{v}_2 + \ldots + \mu'_\ell\vec{v}_\ell \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu'_1\vec{v}_1 + \mu'_2\vec{v}_2 + \ldots + \mu'_\ell\vec{v}_\ell + (-\mu_1)\vec{w}_1 + (-\mu_2)\vec{w}_2 + \ldots + (-\mu_s)\vec{w}_s = \vec{0}$

Όμως $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_\ell, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_s$ γρ. ανεξάρτητα αφού είναι βάση του W

οπότε: $\mu'_1 = \mu'_2 = \ldots = \mu'_\ell = \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_s = 0$

Άρα $\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow (-\lambda_1)\vec{v}_1 + \ldots + (-\lambda_\ell)\vec{v}_\ell + (-\lambda'_1)\vec{u}_1 + \ldots + (-\lambda'_t)\vec{u}_t = \vec{0}$

Αλλά, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_\ell, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_t$ γρ. ανεξάρτητα αφού είναι βάση του U

οπότε: $\lambda_1 = \ldots = \lambda_\ell = \lambda'_1 = \ldots = \lambda'_t = 0$

Επομένως, συνολικά: $\lambda_i = \lambda'_i = \mu_i = 0 \quad \forall\ i$

Άρα, τα διανύσματα του συνόλου $\mathbb{B}$ είναι γρ. ανεξάρτητα

<u>2η περίπτωση:</u> $U \cap W = \{\vec{0}\}$

Έστω $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_t\}$ βάση του U και $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_s\}$ βάση του W.

Ομοίως με την 1η περίπτωση, μπορούμε να δείξουμε ότι το σύνολο $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_t, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_s\}$ είναι βάση του $U+W$, οπότε:

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim\cancelto{0}{(U\cap W)}$$

ΑΣΚΗΣΗ 14

α) Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ δηλ. $W_1 = R(A)$

έχουμε: $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1 \quad 1 \\ \leftarrow (+) \\ \leftarrow (+) \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ (-4/3) \\ \leftarrow (+) \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Άρα: $\dim W_1 = \dim R(A) = \dim R(U) = 2 = r(A)$

$\{$βάση του $W_1\} = \{$βάση του $R(A)\} = \{$στήλες του A που αντιστοιχούν στις στήλες του U με οδηγούς$\} = \{$όλες οι στήλες του $A\} =$

$= \{(1,-1,-1), (1,2,3)\}$

Το μη-μηδενικό διάνυσμα $(5,1,3)$ που παράγει το W_2 είναι γρ. ανεξάρτητο (όπως κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα μόνο του) και άρα

$\{$βάση του $W_2\} = \{(5,1,3)\}$

β) Έστω $\vec{v}_1 = (1,-1,-1)$, $\vec{v}_2 = (1,2,3)$, $\vec{v}_3 = (5,1,3)$

$W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus (x,y,z) = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 = \vec{\mu}v_3\ ,\ \lambda_1, \lambda_2, \mu \in \mathbb{R}\}$

Έχουμε: $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 = \mu\vec{v}_3 \Leftrightarrow \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 - \mu\vec{v}_3 = \vec{0} \underset{\mu = -\lambda_3}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 = \vec{0}$

Άρα $W_1 \cap W_2 \neq \{\vec{0}\}$ ανν $\{\exists\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)\}$

δηλ. ανν $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ γρ. εξαρτημένα$\}$

Έστω $$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1 \ 1 \\ \leftarrow (+) \\ \leftarrow (+) \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ (-4/3) \\ \leftarrow (+) \end{array} \rightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_B$$

$\dim N(B) = n - r(B) = 3 - 2 = 1 \neq 0$

Άρα $\exists\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$ τ.ω. $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 = \vec{0}$

δηλ. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ γρ. εξαρτημένα, οπότε $W_1 \cap W_2 \neq \{\vec{0}\}$

Έχουμε επίσης ότι $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ γρ. ανεξάρτητα, ενώ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ γρ. εξαρτημένα, άρα $\vec{v}_3 \in \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \Rightarrow \vec{v}_3 \in W_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (βάση του W_2) $\in W_1 \underset{\substack{\uparrow \\ W_2 \neq W_1}}{\Rightarrow} W_2 \subset W_1 \implies W_1 \cap W_2 = W_2$

γ) $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) =$

$= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_2 = \dim W_1 = 2$

δ) Έστω $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ δηλ. $W_1 = R(\Gamma^T)$

Επίσης, $R(\Gamma^T) \oplus N(\Gamma) = \mathbb{R}^3 \Rightarrow W_1 \oplus N(\Gamma) = \mathbb{R}^3$
δηλ. ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που είναι συμπληρωματικός του W_1 είναι
ο $N(\Gamma)$.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \overset{(-1)}{\underset{(+)}{\hookleftarrow}} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} = U_\Gamma$$

$$\Gamma\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U_\Gamma \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3v + 4w = 0 \Leftrightarrow v = -\frac{4}{3}w \\ u - v - w = 0 \Leftrightarrow u = v + w \Rightarrow u = -\frac{1}{3}w \\ w \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Άρα: $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1/3)w \\ (-4/3)w \\ w \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} -1/3 \\ -4/3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\{$Βάση του $N(\Gamma)\} = \left\{\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 1\right)\right\}$