ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Γραμμική Άλγεβρα Ι» (ΕΜ111) – Χειμερινό Εξάμηνο 2006-2007, Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

5^Ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $v_1, v_2, ..., v_k \in V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αν $u \in V$ και $u, v_1, v_2, ..., v_k$ γραμμικώς εξαρτημένα, δείξτε ότι το u γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, ..., v_k$.

Άσκηση 2: Αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$, τότε το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των $v_1, v_2, ..., v_k \in V$ είναι υπόχωρος του V και συμβολίζεται $\langle v_1, v_2, ..., v_k \rangle$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Το σύνολο $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ είναι βάση του V.

(ii) $\langle v_1, v_2, ..., v_k \rangle = V$ και $\langle v_1, v_2, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_k \rangle \subset V$, $\forall\, i = 1, 2, ..., k$.

(iii) Τα διανύσματα $v_1, v_2, ..., v_k \in V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και τα $u, v_1, v_2, ..., v_k \in V$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα $\forall\, u \in V$.

(iv) $\langle v_1, v_2, ..., v_k \rangle = V$ και κάθε $u \in V$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, ..., v_k$.

Άσκηση 3: Έστω $V \neq \{\mathbf{0}\}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $v_1, v_2, ..., v_k \in V$ με $v_i \neq \mathbf{0}$, $\forall\, i = 1, 2, ..., k$. Δείξτε ότι υπάρχει υποσύνολο του συνόλου $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ που να αποτελεί βάση του $\langle v_1, v_2, ..., v_k \rangle$.

Άσκηση 4: Έστω V είναι ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$, και $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ μια βάση του V. Έστω $u \in V$ με $u = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_i v_i + ... + \lambda_k v_k$ όπου $\lambda_i \neq 0$. Δείξτε ότι και το σύνολο $\{v_1, ..., v_{i-1}, u, v_{i+1}, ..., v_k\}$ είναι βάση του V.

Άσκηση 5: Έστω V είναι ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ με $\dim V = k$. Δείξτε ότι:

α) Αν $v_1, v_2, ..., v_m \in V$ με $m > k$, τότε τα $v_1, v_2, ..., v_m$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

β) Αν $v_1, v_2, ..., v_k \in V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε αποτελούν βάση του V.

γ) Αν W είναι υπόχωρος του V, τότε: (i) $\dim W \leq \dim V$

(ii) Αν $\dim W = \dim V$, τότε $W = V$

Άσκηση 6: Έστω το σύνολο $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \setminus x, y \in \mathbb{R}\}$. α) Δείξτε ότι είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος.

β) Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του.

Άσκηση 7: Θεωρούμε το σύνολο $V = \{\alpha x^2 + \beta x + \gamma \setminus a, b, \gamma \in \mathbb{R}\}$ των πολυωνύμων με σταθερούς συντελεστές.

α) Δείξτε ότι το V είναι πραγματικός γραμμικός χώρος και βρείτε μια βάση του.

β) Εξετάστε αν τα $v_1 = x^2 - 2x + 3$, $v_2 = x^2 - 1$, $v_3 = x^2 + x + 1$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αποτελεί το $\{v_1, v_2, v_3\}$ βάση του V;

γ) Εξετάστε αν τα $v_1 = x^2$, $v_2 = x^2 + 1$, $v_3 = 3x^2 + 2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Άσκηση 8: Έστω το σύνολο $V = \{(x,y,z) \ \backslash \ x = 2y = 3z, \ x,y,z \in \mathbb{R}\}$.

α) Δείξτε ότι το V είναι πραγματικός διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \ \backslash \ x,y,z \in \mathbb{R}\}$.

β) Βρείτε μια βάση του V και τη διάσταση του.

γ) Βρείτε διανύσματα που μαζί με τη βάση του V να αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 9: Έστω το σύνολο $V = \{(x,y,z) \ \backslash \ 2x + y + z = 0, \ x,y,z \in \mathbb{R}\}$. Δείξτε ότι το V είναι πραγματικός διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και βρείτε δύο διαφορετικές βάσεις του και τη διάσταση του.

Άσκηση 10: Εξετάστε αν τα παρακάτω σύνολα αποτελούν διανυσματικούς υπόχωρους του $\mathbb{R}^2$.

α) $V = \{(x,y) \ \backslash \ 3x + y = 0, \ x,y \in \mathbb{R}\}$, β) $V = \{(x,y) \ \backslash \ 3(x+2) = 5y, \ x,y \in \mathbb{R}\}$,

γ) $V = \{(x,y) \ \backslash \ 3(x+2) - 5y = 6, \ x,y \in \mathbb{R}\}$, δ) $V = \left\{(x,y) \ \backslash \ x^2 + y^2 = 0, \ x,y \in \mathbb{R}\right\}$.

Άσκηση 11: Δείξτε ότι το σύνολο $C_{[a,b]} = \{f \ \backslash \ f:[a,b] \to \mathbb{R}, \ f \text{ συνεχής}\}$, δηλαδή όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων από ένα διάστημα $[a,b]$ στο $\mathbb{R}$, είναι πραγματικός γραμμικός χώρος.

Άσκηση 12: Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του χώρου στηλών και του μηδενόχωρου των επόμενων πινάκων:

$$\alpha)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \beta)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \gamma)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \delta)\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 1 \\ -1 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Ποια η τάξη κάθε πίνακα;

Άσκηση 13: Βρείτε την παραγοντοποίηση LU σε κάτω τριγωνικό πίνακα L και σε πίνακα U με κλιμακωτή μορφή, για το πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ποια είναι η τάξη του A; Επίσης, προσδιορίστε τις βασικές και τις ελεύθερες μεταβλητές του συστήματος $Ax = \mathbf{0}$. Βρείτε τη γενική λύση του ομογενούς συστήματος. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι συντεταγμένες του διανύσματος b, έτσι ώστε το μη-ομογενές σύστημα $Ax = b$ να έχει λύση. Είναι αυτή η λύση μοναδική; Αλλάξτε κατάλληλα το στοιχείο $(A)_{34}$ έτσι ώστε το $Ax = b$ να έχει λύση $\forall\, b \in \mathbb{R}^3$.

Άσκηση 14: Δείξτε ότι σε ένα πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, α) οι μη-μηδενικές γραμμές είναι γραμμικά ανεξάρτητες, και β) οι στήλες που περιέχουν οδηγούς είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητες.

Άσκηση 15: Εξετάστε αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τα διανύσματα:

α) $(0,1)$, $(1,1)$, β) $(1,1)$, $(0,1)$, $(1,0)$, γ) $(1,0,0)$, $(1,1,1)$, $(0,1,1)$

Άσκηση 16: Περιγράψτε τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^2$ που παράγετε από τα διανύσματα:

α) $(0,1)$, $(1,1)$, β) $(1,1)$, $(-1,-1)$, γ) $(1,1)$, $(0,1)$, $(1,0)$

Άσκηση 17: Εξετάστε αν τα διανύσματα $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(0,0,1,1)$, $(0,1,0,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή όχι και ελέγξτε εάν το διάνυσμα $(0,0,0,1)$ βρίσκεται στο χώρο που παράγουν.

Άσκηση 18: α) Δείξτε ότι το σύνολο των μη-ιδιόμορφων πινάκων 2×2 δεν είναι διανυσματικός χώρος.
β) Δείξτε ότι το σύνολο των ιδιόμορφων πινάκων 2×2 δεν είναι διανυσματικός χώρος.

Άσκηση 19: Προσδιορίστε την κλιμακωτή μορφή *U*, τις βασικές μεταβλητές, τις ελεύθερες μεταβλητές και τη γενική λύση του ομογενούς συστήματος $Ax = \mathbf{0}$, για

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ποια είναι η τάξη του πίνακα *A*; Βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι συντεταγμένες του διανύσματος *b*, έτσι ώστε το μη-ομογενές σύστημα $Ax = b$ να έχει λύση. Σ' αυτήν την περίπτωση, γράψτε τη γενική λύση του $Ax = b$ ως άθροισμα μιας ειδικής του λύσης και της γενικής λύσης του ομογενούς συστήματος.

Άσκηση 20: Έστω *V* ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $v_1, v_2, v_3 \in V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Εξετάστε αν είναι αληθές ότι και τα διανύσματα $w_1 = v_1 + v_2$, $w_2 = v_1 + v_3$, $w_3 = v_2 + v_3$ είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα.

Άσκηση 21: Βρείτε μια βάση του διανυσματικού χώρου των πινάκων 2×2.

Άσκηση 22: Βρείτε τη διάσταση και μια βάση του χώρου των συμμετρικών 3×3 πινάκων.

Άσκηση 23: Εξετάστε αν είναι αληθείς ή ψευδείς οι προτάσεις: α) Ένας 5×8 πίνακας δεν έχει ποτέ γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες.
β) Αν οι στήλες ενός $m \times n$ πίνακα *A* είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, τότε το σύστημα $Ax = b$ έχει μια ακριβώς λύση $\forall\, b \in \mathbb{R}^m$.

Άσκηση 24: Έστω εννέα διανύσματα $v_1, v_2, ..., v_9 \in \mathbb{R}^7$. Επιλέξτε μια από τις εκφράσεις στις παρενθέσεις για να είναι αληθής καθεμία από τις επόμενες προτάσεις, αιτιολογώντας κάθε φορά την επιλογή σας:
α) Τα $v_1, v_2, ..., v_9$ (είναι) (δεν είναι) (μπορεί να είναι) γραμμικώς ανεξάρτητα.
β) Τα $v_1, v_2, ..., v_9$ (παράγουν) (δεν παράγουν) (μπορεί να παράγουν) τον $\mathbb{R}^7$.
γ) Εάν τα $v_1, v_2, ..., v_9$ είναι στήλες ενός πίνακα *A*, τότε το σύστημα $Ax = b$ (έχει) (δεν έχει) (μπορεί να μην έχει) λύση.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (ΕΜ 111)

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΑΠΟ ΤΟ 5ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Αφού τα $u, v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, $\exists$ μ $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k \in \mathbb{F}$ όχι όλα μηδέν, έτσι ώστε: $\mu u + \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu v_k = 0$. (1)

Αν $\mu = 0$ τότε $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_k v_k = 0$ με κάποιο από τα $\mu_i \neq 0$ που είναι <u>άτοπο</u> αφού $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Άρα $\mu \neq 0$, οπότε: (1) $\Rightarrow$ $u = \left(-\frac{\mu_1}{\mu}\right)v_1 + \left(-\frac{\mu_2}{\mu}\right)v_2 + \ldots + \left(-\frac{\mu_k}{\mu}\right)v_k$

ΑΣΚΗΣΗ 2

<u>(i) ⇒ (ii) :</u> Έστω ότι $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ βάση του V. Άρα:

$<v_1, v_2, \ldots, v_k> = V$. Επίσης, $v_i \notin <v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k>$ γιατί αλλιώς θα υπήρχαν $\lambda_1, \ldots \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ τ.ω.

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_k v_k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_i + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_k v_k = 0$$

που είναι άτοπο αφού $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (ως στοιχεία βάσης).

Άρα: $v_i \notin <v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k> \Rightarrow$

$$\Rightarrow <v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k> \subset V, \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, k$$

<u>(ii) ⇒ (iii) :</u> Έστω ότι ισχύει το (ii), και $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$, με $\lambda_1, \ldots \lambda_k \in \mathbb{F}$. Αν για κάποιο $i \in \{1, \ldots, k\}$, $\exists$ $\lambda_i \neq 0$, τότε

$$v_i = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)v_1 + \ldots + \left(-\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\right)v_{i-1} + \left(-\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right)v_{i+1} + \ldots + \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right)v_k$$

Άρα: $v_i \in \langle v_1, \dots v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots v_k \rangle = \langle v_1, \dots, v_k \rangle = V$ που είναι άτοπο λόγω της υπόθεσης (ii). Άρα $\nexists\ \lambda_i \neq 0$ για κανένα $i \in \{1, \dots, k\}$, δηλ.
$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$, και επομένως τα $v_1, \dots, v_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
Έστω τώρα $u \in V \Rightarrow u \in \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$, άρα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \dots, v_k$ και επομένως τα $u, v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γρ. εξαρτημένα, $\forall u \in V$.

<u>(iii) ⇒ (iv) :</u> Έστω ότι ισχύει το (iii). Από την Άσκηση 1, έχουμε: $u \in \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$, $\forall u \in V$. Άρα $V \subseteq \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ που επειδή $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ δίνει $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle = V$.
Επίσης, $u \in \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle \Rightarrow u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k$ με $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k \in \mathbb{F}$
Έστω ότι $\exists$ και $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in \mathbb{F}$ τ.ω. $u = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_k v_k$.
Άρα $(\lambda_1 - \mu_1) v_1 + (\lambda_2 - \mu_2) v_2 + \dots + (\lambda_k - \mu_k) v_k = 0$, η οποία, επειδή $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γρ. ανεξάρτητα, δίνει $\lambda_i - \mu_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = \mu_i$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$
Επομένως, κάθε διάνυσμα $u \in V$ γράφεται ως γρ. συνδυασμός των $v_1, v_2, \dots, v_k$ κατά μοναδικό τρόπο.

<u>(iv) → (i) :</u> Έστω ότι ισχύει το (iv). Αφού τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ παράγουν το V, αρκεί να δείξουμε ότι είναι και γρ. ανεξάρτητα για να είναι βάση του V. Έστω $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$, με $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F}$.
Επίσης, $0 = 0 v_1 + \dots + 0 v_k$ και επειδή κάθε $u \in V$ (άρα και το 0) γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γρ. συνδυασμός των $v_1, \dots, v_k$, συνεπάγεται ότι $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_k = 0$. Άρα τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γρ. ανεξάρτητα και επειδή $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle = V$ το σύνολο $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ είναι βάση του V.

ΑΣΚΗΣΗ 3

- Αν $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γρ. ανεξάρτητα, τότε εξ' ορισμού το $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ είναι βάση του $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$
- Αν $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γρ. εξαρτημένα με π.χ. $v_k = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{k-1} v_{k-1}$ για $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1} \in \mathbb{F}$, τότε $v_k \in \langle v_1, v_2, \dots, v_{k-1} \rangle$ και επομένως

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_{k-1} \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k \rangle$$

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για τα $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ και συνεχίζοντας θα φτάσουμε σε κάποιο σύνολο $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ με $m \in \mathbb{N}$ και $1 \leq m < k$ τ.ω. $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ και $v_1, v_2, \dots, v_m$ γρ. ανεξάρτητα, οπότε $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ είναι βάση του $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$.
Σημειώνεται ότι είναι αδύνατον να βρίσκουμε συνέχεια γρ. εξαρτημένα διανύσματα μ' αυτήν τη διαδικασία. Π.χ. αν φτάναμε στο ότι $\langle v_1 \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$, τότε το v_1 είναι γρ. ανεξάρτητο (αφού $\lambda_1 v_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$, για $v_1 \neq 0$) και επομένως βάση του $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Έστω $\mu_1 v_1 + \dots + \mu_{i-1} v_{i-1} + \mu u + \mu_{i+1} v_{i+1} + \dots + \mu_k v_k = 0$ (1)
με $\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \dots, \mu_k, \mu \in \mathbb{F}$. Εφόσον $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_i v_i + \dots + \lambda_k v_k$, η εξίσωση (1) δίνει: $\mu_1 v_1 + \dots + \mu_{i-1} v_{i-1} + \mu(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_i v_i + \dots \lambda_k v_k) + \mu_{i+1} v_{i+1} + \dots + \mu_k v_k = 0$

$\Rightarrow (\mu_1 + \mu\lambda_1) v_1 + \dots + (\mu\lambda_i) v_i + \dots + (\mu_k + \mu\lambda_k) v_k = 0$

η οποία επειδή $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι βάση και άρα γρ. ανεξάρτητα δίνει:

$$\left.\begin{cases} \mu_1 + \mu\lambda_1 = 0 \\ \mu_2 + \mu\lambda_2 = 0 \\ \vdots \\ \mu\lambda_i = 0 \Rightarrow \mu = 0 \quad (\text{εφόσον } \lambda_i \neq 0) \\ \vdots \\ \mu_k + \mu\lambda_k = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_{i-1} = \mu = \mu_{i+1} = \dots = \mu_k = 0$$

οπότε από την (1) έχουμε ότι τα $v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_k$ είναι γρ. ανεξάρτητα

Επίσης, $u=\lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_i v_i+\ldots+\lambda_k v_k \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_i=\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)v_1+\ldots+\frac{1}{\lambda_i}u+\ldots+\left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right)v_k \qquad (2)$$

Κάθε διάνυσμα $w\in V$ γράφεται ως γρ. συνδυασμός της βάσης $\{v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_k\}$

Άρα, $\forall\, w\in V$ έχουμε: $w=\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_i v_i+\ldots+\alpha_k v_k$ με $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{F}$.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (2), προκύπτει:

$$w=\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_i\left[\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)v_1+\ldots+\frac{1}{\lambda_i}u+\ldots+\left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right)v_k\right]+\ldots+\alpha_k v_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w=\left(\alpha_1-\frac{\alpha_i}{\lambda_i}\lambda_1\right)v_1+\ldots+\frac{\alpha_i}{\lambda_i}u+\ldots\left(\alpha_k-\frac{\alpha_i}{\lambda_i}\lambda_k\right)v_k$$

δηλ. $w\in\langle v_1,\ldots,v_{i-1},u,v_{i+1},\ldots,v_k\rangle$, $\forall\, w\in V$ και επειδή

τα $v_1,\ldots,v_{i-1},u,v_{i+1},\ldots,v_k$ είναι γρ. ανεξάρτητα, αποτελούν βάση του V.

ΑΣΚΗΣΗ 5

α) Έστω $\{u_1,u_2,\ldots,u_k\}$ μια βάση του V. Τότε $\exists\ \mu_{ij}\in\mathbb{F}$ με $i\in\{1,\ldots,m\}$ και $j\in\{1,\ldots,k\}$ τέτοια ώστε:

$$\left.\begin{aligned}
v_1&=\mu_{11}u_1+\mu_{12}u_2+\ldots+\mu_{1k}u_k\\
v_2&=\mu_{21}u_1+\mu_{22}u_2+\ldots+\mu_{2k}u_k\\
&\ \vdots\\
v_m&=\mu_{m1}u_1+\mu_{m2}u_2+\ldots+\mu_{mk}u_k
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Έστω $\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\ldots+\lambda_m v_m=0 \qquad (2)$

Αντικαθιστώντας τα $v_1,v_2,\ldots,v_m$ από την (1) στη (2) προκύπτει:

$$\lambda_1(\mu_{11}u_1+\mu_{12}u_2+\ldots+\mu_{1k}u_k)+\lambda_2(\mu_{21}u_1+\mu_{22}u_2+\ldots+\mu_{2k}u_k)+\ldots$$
$$+\lambda_m(\mu_{m1}u_1+\mu_{m2}u_2+\ldots+\mu_{mk}u_k)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda_1\mu_{11} + \lambda_2\mu_{21} + \ldots + \lambda_m\mu_{m1})u_1 + (\lambda_1\mu_{12} + \lambda_2\mu_{22} + \ldots + \lambda_m\mu_{m2})u_2 + \ldots$$

$$+ (\lambda_1\mu_{1k} + \lambda_2\mu_{2k} + \ldots + \lambda_m\mu_{mk})u_k = 0$$

η οποία, επειδή $u_1, u_2, .., u_k$ είναι γρ. ανεξάρτητα (αφού είναι βάση του V), δίνει:

$$\begin{cases} \mu_{11}\lambda_1 + \mu_{21}\lambda_2 + \ldots + \mu_{m1}\lambda_m = 0 \\ \mu_{12}\lambda_1 + \mu_{22}\lambda_2 + \ldots + \mu_{m2}\lambda_m = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \mu_{1k}\lambda_1 + \mu_{2k}\lambda_2 + \ldots + \mu_{mk}\lambda_m = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{21} & \ldots & \mu_{m1} \\ \mu_{12} & \mu_{22} & \ldots & \mu_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{1k} & \mu_{2k} & \ldots & \mu_{mk} \end{bmatrix}}_{\substack{A \\ (k \times m)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}}_{\substack{C \\ (m \times 1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{0 \\ (k \times 1)}} \qquad (3)$$

Έχουμε: $\dim N(A) = [\text{πλήθος στηλών}] - [\text{τάξη του } A] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dim N(A) = m - r(A) \underset{r(A) \leq k}{\Rightarrow} \dim N(A) \geq m - k > 0$$

Άρα $\dim N(A) > 0$, οπότε το σύστημα $AC = 0$ έχει μη-μηδενικές λύσεις, δηλ. $\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ όχι όλα μηδέν τ.ω. να ισχύει η (2) και επομένως τα $v_1, v_2, \ldots, v_m$ είναι γρ. εξαρτημένα

β) Σ' αυτήν την περίπτωση $m = k$ και το σύστημα (3) έχει μοναδική λύση τη $C = 0$, δηλ. $\dim N(A) = 0 \Rightarrow k = r(A)$. Άρα ο $k \times k$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, και (1) δίνει:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1k} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{k1} & \xi_{k2} & \cdots & \xi_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} u_1 &= \xi_{11}v_1 + \xi_{12}v_2 + \ldots + \xi_{1k}v_k \\ u_2 &= \xi_{21}v_1 + \xi_{22}v_2 + \ldots + \xi_{2k}v_k \\ &\vdots \\ u_k &= \xi_{k1}v_1 + \xi_{k2}v_2 + \ldots + \xi_{kk}v_k \end{aligned} \right\} \qquad (4)$$

Επειδή το $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ είναι βάση του V, κάθε διάνυσμα $w \in V$ γράφεται ως $w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k$, με $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$
η οποία, αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (4) δίνει:

$$w = \alpha_1(\xi_{11}v_1 + \xi_{12}v_2 + \ldots + \xi_{1k}v_k) + \alpha_2(\xi_{21}v_1 + \xi_{22}v_2 + \ldots + \xi_{2k}v_k) + \ldots$$
$$+ \alpha_k(\xi_{k1}v_1 + \xi_{k2}v_2 + \ldots + \xi_{kk}v_k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = (\alpha_1\xi_{11} + \alpha_2\xi_{21} + \ldots + \alpha_k\xi_{k1})v_1 + (\alpha_1\xi_{12} + \alpha_2\xi_{22} + \ldots + \alpha_k\xi_{k2})v_2 + \ldots$$
$$+ (\alpha_1\xi_{1k} + \alpha_2\xi_{2k} + \ldots + \alpha_k\xi_{kk})v_k$$

δηλ. κάθε $w \in V$ γράφεται ως γρ. συνδυασμός των $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Άρα $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ και επειδή $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι γρ. ανεξάρτητα αποτελούν μια βάση του V.

γ) i) Στο ερώτημα (α) είδαμε ότι αν $\dim V = k$, τότε $\nexists$ σύνολο με περισσότερα από k γρ. ανεξάρτητα διανύσματα. Άρα αν $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ μια βάση του $W \subseteq V$, δεν μπορεί να είναι $m > k$. Άρα: $m \leq k \Rightarrow \dim W \leq \dim V$

ii) Έστω $\dim W = \dim V = k$ και $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ μια οποιαδήποτε βάση του W. Εφόσον $W \subseteq V$, τα $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ και επιπλέον είναι γρ. ανεξάρτητα. Στο ερώτημα (β) είδαμε ότι οποιαδήποτε k-άδα γρ. ανεξάρτητων διανυσμάτων του V είναι βάση του. Άρα: $\langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle = V$ δηλ. $W = V$

ΑΣΚΗΣΗ 6

α) Το $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \setminus x,y \in \mathbb{R}\}$ είναι εφοδιασμένο με μια εσωτερική πράξη προσθεσης $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, η οποία ορίζεται ως:

$$v_1 + v_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$$

$\forall \; v_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ και $v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ με $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

Η πρόσθεση έχει τις ιδιότητες:

(i) $v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = v_2 + v_1$ (αντιμετάθεση)
$\forall \; v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$

(ii) $v_1 + (v_2 + v_3) = (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) =$
$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) = (v_1 + v_2) + v_3$ (προσεταιριστικότ.)
$\forall \; v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$

(iii) $\exists$ το στοιχείο $0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$, τ.ω.
$v_1 + 0 = (x_1, y_1) + (0, 0) = (x_1, y_1) = v_1$, $\forall \; v_1 \in \mathbb{R}^2$

(iv) $\forall \; v_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $\exists \; (-x_1, -y_1) = -v_1 \in \mathbb{R}^2$, τ.ω. $v_1 + (-v_1) = 0$

Δηλ. το $\mathbb{R}^2$ είναι αντιμεταθετική προσθετική ομάδα

Επίσης ορίζεται μια εξωτερική πράξη πολλ/σμού των $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}$ πάνω στο $\mathbb{R}^2$ δηλ. $\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε:

$$\lambda v_1 = \lambda (x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{με } \lambda \in \mathbb{R}$$

Ο βαθμωτός πολλ/σμός έχει τις ιδιότητες:

(i) $(\lambda + \mu) v_1 = (\lambda + \mu)(x_1, y_1) = ((\lambda + \mu) x_1, (\lambda + \mu) y_1) = (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda y_1 + \mu y_1) =$
$= (\lambda x_1, \lambda y_1) + (\mu x_1, \mu y_1) = \lambda (x_1, y_1) + \mu (x_1, y_1) = \lambda v_1 + \mu v_1$
$\forall \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $v_1 \in \mathbb{R}^2$

(ii) $\lambda (v_1 + v_2) = \lambda (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (\lambda x_1 + \lambda x_2, \lambda y_1 + \lambda y_2) =$
$= (\lambda x_1, \lambda y_1) + (\lambda x_2, \lambda y_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$, $\forall \; \lambda \in \mathbb{R}$ και $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$

(iii) $\lambda(\mu v_1) = \lambda(\mu x_1, \mu y_1) = (\lambda\mu x_1, \lambda\mu y_1) = (\lambda\mu)(x_1, y_1) = (\lambda\mu) v_1$

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και
$\forall v_1 \in \mathbb{R}^2$

(iv) $1 v_1 = 1(x_1, y_1) = (1x_1, 1y_1) = (x_1, y_1) = v_1 \quad , \ \forall \ v_1 \in \mathbb{R}^2$

Άρα το $\mathbb{R}^2$, με πράξεις την πρόσθεση και τον πολλ/σμό με πραγματικό αριθμό, είναι διανυσματικός χώρος.

β) $\forall \ v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ έχουμε:

$v = x(1,0) + y(0,1) = x e_1 + y e_2$. Δηλαδή: $\langle e_1, e_2 \rangle = \mathbb{R}^2$

Επιπλέον, $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (0,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$ δηλ. τα e_1, e_2 είναι γρ. ανεξάρτητα και παράγουν τον $\mathbb{R}^2$. Άρα $\{e_1, e_2\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^2$ και $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

ΑΣΚΗΣΗ 7

α) Έστω $v_1, v_2 \in V$ με $v_i = \alpha_i x^2 + \beta_i x + \gamma_i$ για $i = 1,2$

Τότε: $v_1 + v_2 = (\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1) + (\alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2) =$

$= (\alpha_1 + \alpha_2) x^2 + (\beta_1 + \beta_2) x + (\gamma_1 + \gamma_2) \in V$

Ιδιότητες πρόσθεσης:

i) $v_1 + v_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) x^2 + (\beta_1 + \beta_2) x + (\gamma_1 + \gamma_2) = v_2 + v_1 \quad , \quad \forall \ v_1, v_2 \in V$

ii) $v_1 + (v_2 + v_3) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) x^2 + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) x + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) =$

$= (v_1 + v_2) + v_3 \quad , \quad \forall \ v_1, v_2, v_3 \in V$

iii) $\exists \ 0 = 0x^2 + 0x + 0 \in V$, τ.ω. $v_1 + 0 = v_1 , \ \forall \ v_1 \in V$

iv) $\forall\ v_1=\alpha_1 x^2+\beta_1 x+\gamma_1,\ \exists\ (-v_1)=(-\alpha_1)x^2+(-\beta_1)x+(-\gamma_1)\in V$, τ.ω.

$v_1+(-v_1)=0$

Έστω $\lambda\in\mathbb{R}$ και $v_1\in V$. Τότε $\lambda v_1=(\lambda\alpha_1)x^2+(\lambda\beta_1)x+(\lambda\gamma_1)\in V$

Ιδιότητες του πολλ/σμού με πραγματικό αριθμό:

i) $(\lambda+\mu)v_1=(\lambda+\mu)(\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1)=\lambda(\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1)+\mu(\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1)=$

$=\lambda v_1+\mu v_1 \quad , \quad \forall\ \lambda,\mu\in\mathbb{R},\ v_1\in V$

ii) $\lambda(v_1+v_2)=\lambda(\alpha_1+\alpha_2)x^2+\lambda(\beta_1+\beta_2)x+\lambda(\gamma_1+\gamma_2)=$

$=\lambda(\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1)+\lambda(\alpha_2x^2+\beta_2x+\gamma_2)=$

$=\lambda v_1+\lambda v_2 \quad , \quad \forall\ v_1,v_2\in V$ και $\lambda\in\mathbb{R}$

iii) $(\lambda\mu)v_1=(\lambda\mu)(\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1)=\lambda(\mu\alpha_1x^2+\mu\beta_1x+\mu\gamma_1)=$

$=\lambda(\mu v_1) \quad , \quad \forall\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$ και $v_1\in V$

iv) $1v_1=1(\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1)=v_1 \quad , \quad \forall\ v_1\in V$

Άρα το V είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος.

$\forall\ v_1\in V$ έχουμε: $\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1=\alpha_1(x^2+0x+0)+\beta_1(0x^2+x+0)+$
$+\gamma_1(0x^2+0x+1)$. Άρα τα μονώνυμα: $e_1=x^2$, $e_2=x$, $e_3=1$
παράγουν τον V (δηλ. $<e_1,e_2,e_3>=V$). Επιπλέον:

$\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3=0 \Rightarrow \lambda_1x^2+\lambda_2x+\lambda_3=0 \quad (\forall\ x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Άρα τα $x^2, x, 1$ είναι γρ. ανεξάρτητα και παράγουν το V, οπότε το $\{x^2,x,1\}$ είναι μια βάση του V.

β) Έστω: $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3=0 \Rightarrow \lambda_1(x^2-2x+3)+\lambda_2(x^2-1)+$
$+\lambda_3(x^2+x+1)=0 \Rightarrow (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x^2+(-2\lambda_1+\lambda_3)x+(3\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)=0$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ -2\lambda_1+\lambda_3=0\\ 3\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&1&1\\-2&0&1\\3&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Έστω $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\-2&0&1\\3&-1&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&3\\0&-4&-2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&3\\0&0&4\end{bmatrix}$

Άρα $r(A)=3$ και $\dim N(A)=3-r(A)=0$

δηλ. μοναδική λύση είναι η $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0)$

και άρα τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Εφόσον $\dim V=3$, κάθε 3άδα γρ. ανεξάρτητων διανυσμάτων του V

αποτελεί βάση του V, άρα και τα $\{v_1, v_2, v_3\}$

γ) Έστω $\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3=0 \Rightarrow \lambda_1 X^2+\lambda_2(X^2+1)+\lambda_3(3X^2+2)=0$

$\Rightarrow (\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3)X^2+0X+(\lambda_2+2\lambda_3)1=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{r}\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3=0\\ \lambda_2+2\lambda_3=0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&1&3\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

Έστω $U=\begin{bmatrix}1&1&3\\0&1&2\end{bmatrix}$ και $\dim N(U)=3-r(U)=1>0$

άρα $\exists$ μη-μηδενικές 3άδες $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ και τα v_1, v_2, v_3 είναι

γρ. εξαρτημένα.

ΑΣΚΗΣΗ 8

α) Προφανώς $V\subseteq\mathbb{R}^3$ (εφόσον περιέχει 3άδες πραγματικών αριθμών)

και $V\neq\emptyset$ (ένα προφανές διάνυσμα του V είναι το $(0,0,0)$)

Επιπλέον $\forall\, v_1, v_2\in V$ με $v_1=(x_1,y_1,z_1)$, $v_2=(x_2,y_2,z_2)$

έχουμε: $v_1+v_2=(x_1+x_2,\,y_1+y_2,\,z_1+z_2)$

$\left.\begin{array}{l}\text{με } x_1+x_2=2y_1+2y_2=2(y_1+y_2) \text{ και}\\ x_1+x_2=3z_1+3z_2=3(z_1+z_2)\end{array}\right\}$ δηλ. $v_1+v_2\in V$

Άρα το V είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.

Επίσης, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ και $\forall\, v_1 \in V$ έχουμε:

$\lambda v_1 = \lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$

με $\lambda x_1 = \lambda(2y_1) = 2(\lambda y_1)$ και $\lambda x_1 = \lambda(3z_1) = 3(\lambda z_1)$, δηλ. $\lambda v_1 \in V$

Άρα το V είναι κλειστό και ως προς το βαθμωτό πολ/σμό και επομένως, είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

β) κάθε διάνυσμα $v = (x, y, z) \in V$ γράφεται ως

$$(x, y, z) = \left(x, \frac{x}{2}, \frac{x}{3}\right) = x\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

Άρα το διάνυσμα $v_1 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ παράγει το V και είναι γρ. ανεξάρτητο (αφού $\lambda v_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda = 0$). Άρα μια βάση του V είναι το μονοσύνολο $\left\{\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)\right\}$ και επομένως

$\dim V = 1$

γ) Ξέρουμε ότι $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Άρα ψάχνουμε 2 διανύσματα $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ και $v_3 = (x_3, y_3, z_3)$ τ.ω. $\{v_1, v_2, v_3\}$ βάση του $\mathbb{R}^3$. Αρκεί το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 1/2 & y_2 & y_3 \\ 1/3 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

να έχει μοναδική λύση τη $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$

ή ισοδύναμα $r(A) = 3$ για $A = \begin{bmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 1/2 & y_2 & y_3 \\ 1/3 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$

έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 1/2 & y_2 & y_3 \\ 1/3 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 0 & y_2 - \frac{x_2}{2} & y_3 - \frac{x_3}{2} \\ 0 & z_2 - \frac{x_2}{3} & z_3 - \frac{x_3}{3} \end{bmatrix}$$

Ικανή συνθήκη (αλλά όχι αναγκαία) για να έχουμε $r(A) = 3$ είναι

$y_2 - \frac{x_2}{2} \neq 0$, $z_3 \neq \frac{x_3}{3}$ και $z_2 = \frac{x_2}{3}$

π.χ. $v_2 = (1, 0, 1/3)$ και $v_3 = (1, 0, 2)$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Προφανώς $V \subseteq \mathbb{R}^3$ και $V \neq \emptyset$.

Επίσης, $\forall\, v_1, v_2 \in V$ με $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$

έχουμε: $v_1 + v_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2)$

και $2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (2x_1 + y_1 + z_1) + (2x_2 + y_2 + z_2) =$
$= 0 + 0 = 0$. Δηλ. $v_1 + v_2 \in V$

Άρα, το V είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.

Επίσης, $\forall\, v_1 = (x_1, y_1, z_1) \in V$ και $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$\lambda v_1 = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$ με $2(\lambda x_1) + (\lambda y_1) + \lambda z_1 = \lambda(2x_1 + y_1 + z_1) =$
$= \lambda 0 = 0$. Δηλ. $\lambda v_1 \in V$

Άρα, το V κλειστό και ως προς βαθμωτό πολ/σμό, και επομένως διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

$\forall\, v \in V$ έχουμε $2x + y + z = 0 \Leftrightarrow z = -2x - y$

Άρα $\forall\, v = (x, y, z) \in V$ έχουμε:

$$v = (x, y, z) = (x, y, -2x - y) = x(1, 0, -2) + y(0, 1, -1)$$

με $x, y \in \mathbb{R}$

Άρα $V = \langle (1, 0, -2), (0, 1, -1) \rangle$ (δηλ. το V παράγεται από τα $v_1 = (1, 0, -2)$ και $v_2 = (0, 1, -1)$)

Επίσης: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άρα $r(A) = 2$ και $\dim N(A) = 2 - 2 = 0$

οπότε μοναδ. λύση $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$ και τα v_1, v_2 είναι γρ. ανεξάρτητα, άρα $\{v_1, v_2\}$ βάση του V και $\dim V = 2$

Για να βρούμε μια άλλη βάση του V χρησιμοποιούμε το θεώρημα της Άσκησης 4 παραπάνω. π.χ. μια 2η βάση του V είναι η

$V_1 = (1, 0, -2)$ και $V_2 = 2(1, 0, -2) + 3(0, 1, -1) = (2, 3, -7)$

και μια άλλη η:

$V_1 = (2, 3, -7)$ και $V_2 = 1(1, 0, -2) + 1(2, 3, -7) = (3, 3, -9)$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 10}}$

Διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$ είναι: 1) όλο το $\mathbb{R}^2$, 2) κάθε ευθεία που περνά από το $(0,0)$, και 3) το μονοσύνολο $\{(0,0)\}$

α) Ο V αποτελείται από τα σημεία της ευθείας $3x+y=0$ που περνά από το $(0,0)$ και άρα είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$

Εναλλακτικά: έστω $V_1 = (x_1, y_1)$, $V_2 = (x_2, y_2)$ οποιαδήποτε $V_1, V_2 \in V$.

Τότε $V_1 + V_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ με $3(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) =$

$= (3x_1 + y_1) + (3x_2 + y_2) = 0 + 0 = 0$ και άρα $V_1 + V_2 \in V$

Επίσης, $\forall$ $V_1 \in V$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε: $\lambda V_1 = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

με $3(\lambda x_1) + (\lambda y_1) = \lambda(3x_1 + y_1) = \lambda 0 = 0$ και άρα $\lambda V_1 \in V$

Άρα $V \subseteq \mathbb{R}^2$ κλειστό ως προς πρόσθεση & βαθμωτό πολλ/σμό $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ V διανυσμ. υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$

β) Ο V αποτελείται από τα σημεία της ευθείας $3(x+2) = 5y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x + 6 = 5y$ η οποία δεν περνά από το $(0,0)$ και άρα ο V δεν είναι διανυσμ. υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

Εναλλακτικά, $\forall$ $V_1, V_2 \in V$ έχουμε:

$V_1 + V_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ και $3[(x_1 + x_2) + 2] = 3[(x_1 + 2) + x_2] =$

$= 3(x_1 + 2) + 3x_2 = 5y_1 + 5y_2 - 6 = 5(y_1 + y_2) - 6 \neq 5(y_1 + y_2)$

και άρα $V_1 + V_2 \notin V$

οπότε V δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$

γ) Ο V αποτελείται από τα σημεία της ευθείας $3(x+2)-5y=6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x+6-5y=6 \Leftrightarrow 3x=5y$ που περνά από το $(0,0)$
και επομένως το V είναι διανυσμ. υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.
(Εναλλακτικά, όπως ερώτημα (α))

δ) $x^2+y^2=0 \underset{x,y\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} (x,y)=(0,0)$

Άρα $V=\{(0,0)\}$ δηλ. ο τετριμμένος υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

ΑΣΚΗΣΗ 11

Αν $f,g \in C_{[\alpha,b]}$ και $\lambda\in\mathbb{R}$, ορίζουμε:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad , \quad x\in[\alpha,b]$

$(\lambda f)(x)=\lambda f(x) \quad , \quad x\in[\alpha,b]$

δηλ. $f+g\in C_{[\alpha,b]}$ $\forall f,g\in C_{[\alpha,b]}$ και $\lambda f\in C_{[\alpha,b]}$, $\forall f\in C_{[\alpha,b]}$ και $\forall \lambda\in\mathbb{R}$

Ιδιότητες πρόσθεσης:

i) $f+g=g+f$, ii) $(f+g)+h=f+(g+h)$, $\forall f,g,h\in C_{[\alpha,b]}$

iii) $\exists$ μηδενική συνάρτηση $f_0(x)=0$ $\forall x\in[\alpha,b]$
δηλ. $f+f_0=f$ $\forall f\in C_{[\alpha,b]}$ όπου $f_0\in C_{[\alpha,b]}$

iv) $\forall f\in C_{[\alpha,b]}$, $\exists$ $(-f)(x)=-f(x)\in C_{[\alpha,b]}$, τ.ω.
$f+(-f)=f_0$

Ιδιότητες πολλ/σμού:

i) $(\lambda+\mu)f=\lambda f+\mu f$, ii) $\lambda(f+g)=\lambda f+\lambda g$, $\forall f,g\in C_{[\alpha,b]}$ και $\forall \mu,\lambda\in\mathbb{R}$

iii) $(\lambda\mu)f=\lambda(\mu f)$

iv) $1f=f$

Άρα $C_{[\alpha,b]}$ είναι πραγματικός γραμμικός χώρος

ΑΣΚΗΣΗ 12

α) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$R(A) = \{(x,y) \setminus (x,y) = \lambda_1(2,-1) + \lambda_2(0,0),\ \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow R(A) = \{(x,y) \setminus (x,y) = \lambda(2,-1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

Άρα $\dim R(A) = 1$ και βάση το $\{(2,-1)\}$

Τάξη: $r(A) = \dim R(A) = 1$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U$

Άρα $AX = 0 \Leftrightarrow UX = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v \in \mathbb{R}$

Άρα βάση του $N(A)$ το $\{(0,1)\}$ και $\dim N(A) = 1$

Επίσης, αντί για $r(A) = \dim R(A) = 1$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την $r(A) = [\text{πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του } U] = 1$

β) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U$, άρα $r(A) = 1$

Επομένως $\dim R(A) = r(A) = 1$ και $\dim N(A) = n - r(A) = 2 - 1 = 1$

$\{\text{Βάση του } R(A)\} = \{\text{στήλες του } A \text{ που αντιστοιχούν σε στήλες του } U \text{ με οδηγούς}\} = \{(1,0)\}$

$AX = 0 \Leftrightarrow UX = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Άρα: $\{\text{Βάση του } N(A)\} = \{(1,1)\}$

γ) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$, άρα $r(A) = 0$, $R(A) = \{(0,0)\}$

$\dim R(A) = r(A) = 0$ και $\nexists$ βάση του $R(A)$

$\dim N(A) = n - r(A) = 3 - 0 = 3$

Άρα $\left\{ \begin{array}{l} N(A) \subseteq \mathbb{R}^3 \\ \dim N(A) = \dim \mathbb{R}^3 \end{array} \right\} \Rightarrow N(A) = \mathbb{R}^3$

π.χ. {μια βάση του $N(A)$} $= \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

δ) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 1 \\ -1 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow$

$\longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \end{bmatrix} = U$, άρα $r(A) = 3$

$\dim R(A) = r(A) = 3$, $\dim N(A) = n - r(A) = 4 - 3 = 1$

{Βάση του $R(A)$} = {στήλες του A που αντιστοιχούν σε στήλες του U με οδηγούς} = {1η, 2η, 3η στήλη του A}

$= \{(-1,0,-1), (1,2,3), (4,8,6)\}$

$AX = 0 \Leftrightarrow UX = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6w - 2z = 0 \Leftrightarrow w = -\frac{1}{3} z \\ 2v + 8w - z = 0 \Rightarrow 2v = z - 8w \Rightarrow v = \frac{1}{2}\left(z + \frac{8}{3} z\right) \Rightarrow v = \frac{11}{6} z \\ -u + v + 4w + 3z = 0 \Rightarrow u = \frac{11}{6} z + 4\left(-\frac{1}{3}\right) z + 3z \Rightarrow u = \frac{7}{2} z \end{cases}$$

Άρα: $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 7/2 \\ 11/6 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$, δηλ. {βάση του $N(A)$} $= \left\{ \left(\frac{7}{2}, \frac{11}{6}, -\frac{1}{3}, 1 \right) \right\}$

ΑΣΚΗΣΗ 13

$$\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\ *&1&0\\ *&*&1\end{array}\right] \Bigg| \left[\begin{array}{cccc}1&2&0&1\\0&1&1&0\\1&2&0&1\end{array}\right] \begin{array}{l}1 \\ \leftarrow (-) \\ \leftarrow(-)\end{array} \begin{array}{l}0\\ \\ \end{array} \longrightarrow \underbrace{\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{array}\right]}_{L} \Bigg| \underbrace{\left[\begin{array}{cccc}1&2&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]}_{U}$$

$r(A) = [\text{πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του } U] \Rightarrow$

$\Rightarrow r(A) = 2 \quad = [\text{πλήθος βασικών μεταβλητών}]$

$[\text{πλήθος ελεύθ. μεταβλητών}] = n - r(A) = 4 - 2 = 2$

$$AX = 0 \Leftrightarrow UX = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad (1)$$

Βασικές μεταβλητές: u, v (αντιστοιχούν σε στήλες με οδηγούς)
Ελεύθερες >> : w, z (>> σε >> χωρίς >>)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} v + w = 0 \Leftrightarrow v = -w \\ u + 2v + z = 0 \Leftrightarrow u = -2v - z \Rightarrow u = 2w - z \end{cases}$$

Άρα: $\begin{bmatrix}u\\v\\w\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2w-z\\-w\\w\\z\end{bmatrix} = w\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

Το μη-ομογενές σύστημα $AX = b$ έχει λύση ανν $b \in R(A)$

$[\text{μια βάση του } R(A)] = \{$στήλες του A που αντιστοιχούν σε στήλες του U με οδηγούς$\} = \{1\text{η}, 2\text{η}$ στήλη του $A\} = \{(1,0,1), (2,1,2)\}$

Άρα $\{AX = b \text{ έχει λύση}\}$ ανν $\left\{\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ τ.ω. } \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$

$[\text{πλήθος ελεύθ. μεταβλ.}] = n - r(A) = 4 - 2 \neq 0$, άρα η λύση δεν θα είναι μοναδική.

Το $AX = b$ έχει λύση $\forall\, b \in \mathbb{R}^3$ ανν $R(A) = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \dim R(A) = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r(A)=3$. Αυτό θα ήταν αληθές αν π.χ. $(U)_{34}\neq 0 \Leftarrow (A)_{34}\neq 1$
π.χ. αν $(A)_{34}=2$.

ΑΣΚΗΣΗ 14

α)

$$U=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \alpha_{1j_1} & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_{2j_2} & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \alpha_{pj_p} & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

δηλ. $U\in\mathbb{R}^{m\times n}$ με p μη-μηδενικές γραμμές και τους οδηγούς $\alpha_{1j_1}, \alpha_{2j_2}, \ldots, \alpha_{pj_p}$ στις στήλες $j_1, j_2, \ldots, j_p$

Αν $r_1, r_2, \ldots, r_p$ τα διανύσματα των μη-μηδενικών γραμμών και

$$\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \ldots + \lambda_p r_p = 0 \quad \text{με } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$$

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \alpha_{1j_1} & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_{2j_2} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_{pj_p} \cdots & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & \ldots & 0\end{bmatrix}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_p=0$

Ο πολ/σμός του διανύσματος $\lambda=[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \ldots \ \lambda_p]$ με την j_1 στήλη δίνει

$\lambda_1\alpha_{1j_1}=0 \Rightarrow \lambda_1=0$ (μιας και $\alpha_{1j_1}\neq 0$)

Υποθέτουμε ότι $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_k=0$ για $k<p$ και θα δείξουμε επαγωγικά ότι $\lambda_{k+1}=0$ $(\forall\ k<p)$

Πολ/σμός του λ με την j_{k+1} στήλη δίνει $\lambda_1\alpha_{1j_{k+1}}+\lambda_2\alpha_{2j_{k+1}}+\ldots+\lambda_k\alpha_{kj_{k+1}}+$
$+\lambda_{k+1}\alpha_{(k+1)j_{k+1}}=0 \Rightarrow \lambda_{k+1}\alpha_{(k+1)j_{k+1}}=0 \Rightarrow \lambda_{k+1}=0$ (αφού $\alpha_{(k+1)j_{k+1}}\neq 0$)

Άρα, $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_p=0$ και τα $r_1, r_2, \ldots, r_p$ είναι γρ. ανεξάρτητα β) Σχηματίζουμε τον πίνακα U' με στήλες τις στήλες U που περιέχουν οδηγούς, δηλ.

$$U' = \begin{bmatrix} \alpha_{1j_1} & * & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_{2j_2} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \alpha_{3j_3} & \cdots & * \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{pj_p} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

και $c = (c_1, c_2, \ldots, c_p)$ διάνυσμα τ.ω. $U'c = 0$

Εφαρμόζοντας ανάδρομη αντικατάσταση ξεκινώντας από την p-γραμμή έχουμε: $\alpha_{pj_p} c_p = 0 \Rightarrow c_p = 0$ (αφού $\alpha_{pj_p} \neq 0$)

$(p-1)$-γραμμή: $\alpha_{(p-1)j_{p-1}} c_{p-1} + \alpha_{(p-1)j_p} \cancelto{0}{c_p} = 0 \Rightarrow c_{p-1} = 0$ (αφού αφού $\alpha_{(p-1)j_{p-1}} \neq 0$)

Επαγωγικά, έστω ότι $c_p = c_{p-1} = \cdots = c_{p-k} = 0$ για $k < p-1$

τότε:

$(p-k-1)$-γραμμή: $\alpha_{(p-k-1)j_{(p-k-1)}} c_{p-k-1} + \alpha_{(p-k-1)j_{p-k}} \cancelto{0}{c_{p-k}} + \ldots + \alpha_{(p-k-1)j_p} \cancelto{0}{c_p} = 0$

$\Rightarrow \alpha_{(p-k-1)j_{(p-k-1)}} c_{p-k-1} = 0 \Rightarrow c_{p-k-1} = 0$ (αφού $\alpha_{(p-k-1)j_{(p-k-1)}} \neq 0$)

$\forall \; k < p-1$

Άρα, $c_1 = c_2 = \cdots = c_p = 0$ και οι στήλες του U' είναι γρ. ανεξάρτητες.

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 15}}$

α) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = U$, άρα $r(A) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim N(A) = n - r(A) = 0$

άρα μοναδική λύση του $Ac = 0$ είναι $c = 0$
και επομένως τα διανύσματα γρ. ανεξάρτητα

β) $(1,1), (0,1), (1,0) \in \mathbb{R}^2$

Όμως $\dim \mathbb{R}^2 = 2 =$ μέγιστο πλήθος γρ. ανεξάρτ. διανυσμάτων του $\mathbb{R}^2$

άρα $(1,1), (0,1), (1,0)$ είναι γρ. εξαρτημένα

γ) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

άρα: $r(A) = 2 \Rightarrow \dim N(A) = n - r(A) = 3-2 = 1 \neq 0$

άρα $\exists$ μη-μηδενικές λύσεις $(c \neq 0)$ για το σύστημα $Ac = 0$

και επομένως τα τρία διανύσματα είναι γρ. εξαρτημένα.

ΑΣΚΗΣΗ 16

α) Από την άσκηση 15(α) έχουμε ότι $(0,1), (1,1)$ είναι γρ. ανεξάρτητα.

Επίσης, $(0,1), (1,1) \in \mathbb{R}^2$ και $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, άρα

$\langle (0,1), (1,1) \rangle = \mathbb{R}^2$ και $\{(0,1), (1,1)\}$ βάση του $\mathbb{R}^2$

β) $$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U, \quad \text{άρα } r(A) = 1$$

και $\dim N(A) = n - r(A) = 2-1 = 1 \neq 0$, άρα το σύστημα

$Ac = 0$ έχει μη-μηδενικές λύσεις $(c \neq 0)$, οπότε τα $(-1,-1)$ και

$(1,1)$ είναι γρ. εξαρτημένα, και παράγουν τον χώρο

$$V = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (x,y) = \lambda(1,1) \} \Rightarrow V = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus x = y \}$$

δηλ. ο V αποτελείται από τα σημεία της ευθείας $y = x$.

γ) $(0,1), (1,0), (1,1) \in \mathbb{R}^2$ (3 διανύσματα του $\mathbb{R}^2$) άρα γρ. εξαρτημένα

(αφού $\dim \mathbb{R}^2 = 2$)

Όμως $\{(0,1), (1,0)\} =$ κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$, άρα

$<(1,1),(0,1),(1,0)> = \mathbb{R}^2$

ΑΣΚΗΣΗ 17

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=U$$

, άρα $r(A)=$ [πλήθος μη-μηδεν. γραμμών του U]
$\Rightarrow r(A)=3$

και $\dim N(A) = n - r(A) = 4-3 = 1 \neq 0$

άρα $\exists\ c \neq \mathbf{0}$ τ.ω. $Ac=\mathbf{0}$ και τα διανύσματα είναι γρ. εξαρτημένα

Το διάνυσμα $(0,0,0,1)$ βρίσκεται στο χώρο που παράγουν ανν $\exists$ $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4 \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}+\lambda_4\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

η τελευταία γραμμή δίνει $0\lambda_1+0\lambda_2+0\lambda_3+0\lambda_4=1$, άρα το σύστημα είναι ασύμβατο και επομένως,

$(0,0,0,1) \notin <(1,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,1,1),(0,1,0,1)>$

ΑΣΚΗΣΗ 18

α) Αρκεί να δείξουμε ότι $\exists\ A,B \in \mathbb{R}^{2\times2}$ μη-ιδιόμορφοι τ.ω. ο $A+B$ να είναι ιδιόμορφος (βλ. Άσκηση 14(α), φυλλάδιο 4). Δηλ. το σύνολο των μη-ιδιόμορφων 2×2 πινάκων δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και επομένως, δεν είναι διανυσματικός χώρος.

β) Αρκεί να βρούμε πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ιδιόμορφους, τ.ω. ο πίνακας $A+B$ να είναι μη-ιδιόμορφος (βλ. Άσκηση 14(β), φυλλάδιο 4).
Δηλ. το σύνολο των ιδιόμορφων πινάκων 2x2 δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και επομένως, δεν είναι διανυσματικός χώρος.

ΑΣΚΗΣΗ 19

$$A=\begin{bmatrix}0&1&4&0\\0&2&8&0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}0&1&4&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=U$$

Άρα: $AX=0 \Leftrightarrow UX=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}0&1&4&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ (1)

βασική μεταβλητή: v (αντιστοιχεί σε στήλη με οδηγό)
ελεύθερες μεταβλητές: u, w, z (αντιστοιχούν σε στήλες χωρίς οδηγό)

$(1) \Rightarrow v+4w=0 \Leftrightarrow v=-4w$

Άρα, γενική λύση του ομογενούς συστήματος:

$$\begin{bmatrix}u\\v\\w\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u\\-4w\\w\\z\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}u\\v\\w\\z\end{bmatrix}=u\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+w\begin{bmatrix}0\\-4\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \quad u,w,z\in\mathbb{R}$$

$r(A)=$ [πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του U] $=1$

Το μη-ομογενές σύστημα έχει λύση ανν $b\in R(A)$

[μια βάση του $R(A)$] $=$ {στήλες του A που αντιστοιχούν σε στήλες του U με οδηγούς}
$=$ {2η στήλη του A} $=\{(1,2)\}$

Άρα το $AX=b$ έχει λύση ανν $b\in\langle(1,2)\rangle$ δηλ. ανν
$b=(b_1,b_2)$ με $b_2=2b_1$

Σ' αυτήν την περίπτωση:

$$AX=b \Leftrightarrow UX=c \Leftrightarrow \begin{bmatrix}0&1&4&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\0\end{bmatrix}$$

Αν οι ελεύθερες μεταβλητές είναι $u=w=z=0$, τότε παίρνουμε την ειδική λύση: $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, οπότε η γενική λύση

είναι: $X_{γεν} = X_{ειδ} + X_{ομογ.} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

με $u, w, z \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 20

Έστω $\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 + \lambda_3 W_3 = 0$, με $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{F}$

$\Rightarrow \lambda_1 (V_1 + V_2) + \lambda_2 (V_1 + V_3) + \lambda_3 (V_2 + V_3) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 V_1 + \lambda_1 V_2 + \lambda_2 V_1 + \lambda_2 V_3 + \lambda_3 V_2 + \lambda_3 V_3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2) V_1 + (\lambda_1 + \lambda_3) V_2 + (\lambda_2 + \lambda_3) V_3 = 0$

η οποία, αφού V_1, V_2, V_3 είναι γρ. ανεξάρτητα, δίνει:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1),(-)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U$

Άρα $r(A) = [\text{πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του } U] = 3$

και $\dim N(A) = n - r(A) = 3 - 3 = 0$

Άρα $N(A) = \{(0,0,0)\}$ δηλ. μοναδική λύση της (1) είναι η $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$ και επομένως τα W_1, W_2, W_3 είναι γρ. ανεξάρτητα.

ΑΣΚΗΣΗ 21

Έστω $\{A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}^{2\times 2}\}$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_n A_n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \begin{bmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} \alpha_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{bmatrix} \alpha_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{bmatrix} \alpha_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

δηλ. $\{A_1, A_2, \dots, A_n$ γραμμ. ανεξάρτητοι$\}$ ανν $\{(\alpha_1, b_1, c_1, d_1), (\alpha_2, b_2, c_2, d_2), \dots$
$\dots, (\alpha_n, b_n, c_n, d_n) \in \mathbb{R}^4$ γρ. ανεξάρτητα$\}$

Άρα $\dim \mathbb{R}^{2\times 2} = \dim \mathbb{R}^4 = 4$ και

$\{A_1, A_2, A_3, A_4$ βάση του $\mathbb{R}^{2\times 2}\}$ ανν $\{(\alpha_1, b_1, c_1, d_1), (\alpha_2, b_2, c_2, d_2), (\alpha_3, b_3, c_3, d_3),$
$(\alpha_4, b_4, c_4, d_4)$ βάση του $\mathbb{R}^4\}$

Έτσι, αν επιλέξουμε την κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$:
$\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ έχουμε τη βάση
του $\mathbb{R}^{2\times 2}$: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

ΑΣΚΗΣΗ 22

Στην Άσκηση 17 του 4ου φυλλαδίου, δείξαμε ότι σε ένα συμμετρικό $n\times n$ πίνακα είναι δυνατόν να οριστούν ανεξάρτητα $n(n+1)/2$ στοιχεία. Δηλ. σε ένα συμμετρικό 3×3 πίνακα μπορούν να οριστούν ανεξάρτητα 6 στοιχεία.

Δηλ. $A = \begin{bmatrix} \alpha & b & c \\ b & d & f \\ c & f & g \end{bmatrix}$ με $\alpha, b, c, d, f, g \in \mathbb{R}$

Με διαδικασία παρόμοια με αυτήν της Άσκησης 21 παραπάνω, μπορούμε να δείξουμε ότι $\dim V = \dim \mathbb{R}^6 = 6$

όπου $V = \left\{ A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \setminus (A)_{ij} = (A)_{ji} \text{ για } i=1,2,3 \text{ και } j=1,2,3 \right\}$

και μια βάση του V (που αντιστοιχεί στην κανονική βάση του $\mathbb{R}^6$) είναι η:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ΑΣΚΗΣΗ 23

α) Έχουμε 8 στήλες $v_1, v_2, \ldots, v_8 \in \mathbb{R}^5$. Όμως $\dim \mathbb{R}^5 = 5 =$
$=$ μέγιστο πλήθος γρ. ανεξάρτητων διανυσμάτων του $\mathbb{R}^5$.
Άρα 8 στήλες ενός 5×8 πίνακα είναι πάντα γρ. εξαρτημένες, και η πρόταση είναι <u>αληθής</u>

β) $\{n$ γρ. ανεξάρτητες στήλες$\} \Rightarrow \dim R(A) = n \Rightarrow r(A) = n \Rightarrow$
$\Rightarrow [$πλήθος ελεύθερων μεταβλητών$] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{μοναδική λύση αν } b \in R(A) \\ \text{καμμία λύση αν } b \notin R(A) \end{cases}$

Άρα, το σύστημα $Ax=b$ έχει μία ακριβώς λύση αν $b \in R(A)$.
Για να ισχύει αυτό $\forall\, b \in \mathbb{R}^m$ ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι $R(A) = \mathbb{R}^m$, άρα $\dim R(A) = m$, άρα $m = n$.
Δηλ. η πρόταση είναι αληθής $\forall\, b \in \mathbb{R}^m$ μόνο όταν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ δηλ. $m = n$ (τετραγωνικός πίνακας).

ΑΣΚΗΣΗ 24

α) Τα $v_1, v_2, \ldots, v_9$ <u>δεν είναι</u> γρ. ανεξάρτητα, γιατί $\dim \mathbb{R}^7 = 7 =$ $=$ μέγιστο πλήθος γρ. ανεξάρτητων διανυσμάτων του $\mathbb{R}^7$.

β) Τα $v_1, v_2, \ldots, v_9 \in \mathbb{R}^7$ <u>μπορεί να παράγουν</u> τον $\mathbb{R}^7$, αν 7 από αυτά είναι γρ. ανεξάρτητα.

Αν $\langle v_1, v_2, \ldots, v_9 \rangle = V \subseteq \mathbb{R}^7$ ο χώρος που παράγουν τα $v_1, v_2, \ldots, v_9$, τότε $\dim V \leq 7$. Αν $\dim V = 7$ τότε $V = \mathbb{R}^7$ ενώ αν $\dim V < 7$ τότε $V \subset \mathbb{R}^7$ και τα $v_1, v_2, \ldots, v_9$ δεν θα παράγουν τον $\mathbb{R}^7$

γ) Ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{7\times 9}$ και επομένως $r(A) \leq 7$. Άρα $\dim R(A) \leq 7$

$\{Ax = b$ έχει λύση$\}$ ανν $\{b \in R(A) \subseteq \mathbb{R}^7\}$

Αν $\dim R(A) = 7$ τότε $R(A) = \mathbb{R}^7$ και το $Ax = b$ έχει λύση $\forall\, b \in \mathbb{R}^7$.

Αν $\dim R(A) < 7$, τότε $R(A) \subset \mathbb{R}^7$ οπότε $\exists\, b \in \mathbb{R}^7$ για τα οποία το $Ax = b$ δεν έχει λύση, και $b \in \mathbb{R}^7$ για τα οποία το $Ax = b$ έχει λύση.

Άρα, γενικά, το σύστημα $Ax = b$ <u>μπορεί να μην έχει λύση</u>