ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Γραμμική Άλγεβρα & Αναλυτική Γεωμετρία» (ΕΜ111) – Χειμερινό Εξάμηνο 2008-2009
Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

5^{O} ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Έστω το σύνολο $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \ \backslash \ x,y \in \mathbb{R}\}$. α) Δείξτε ότι είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος. β) Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του.

Άσκηση 2: Δείξτε ότι το σύνολο $C_{[a,b]} = \{f \ \backslash \ f:[a,b] \to \mathbb{R}, \ f \text{ συνεχής}\}$, δηλαδή όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων από ένα διάστημα $[a,b]$ στο $\mathbb{R}$, είναι πραγματικός γραμμικός χώρος.

Άσκηση 3: α) Δείξτε ότι το σύνολο των μη-ιδιόμορφων πινάκων 2×2 δεν είναι διανυσματικός χώρος.
β) Δείξτε ότι το σύνολο των ιδιόμορφων πινάκων 2×2 δεν είναι διανυσματικός χώρος.

Άσκηση 4: Εξετάστε αν τα παρακάτω σύνολα αποτελούν διανυσματικούς υπόχωρους του $\mathbb{R}^2$.
α) $V = \{(x,y) \ \backslash \ 3x + y = 0, \ x,y \in \mathbb{R}\}$, β) $V = \{(x,y) \ \backslash \ 3(x+2) = 5y, \ x,y \in \mathbb{R}\}$,
γ) $V = \{(x,y) \ \backslash \ 3(x+2) - 5y = 6, \ x,y \in \mathbb{R}\}$, δ) $V = \{(x,y) \ \backslash \ x^2 + y^2 = 0, \ x,y \in \mathbb{R}\}$.

Άσκηση 5: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k \in V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αν $\vec{u} \in V$ και $\vec{u},\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k$ γραμμικώς εξαρτημένα, δείξτε ότι το $\vec{u}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k$.

Άσκηση 6: Αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$, τότε το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k \in V$ είναι υπόχωρος του V και συμβολίζεται $\langle \vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k \rangle$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) Το σύνολο $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k\}$ είναι βάση του V.
(ii) $\langle \vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k \rangle = V$ και $\langle \vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_{i-1},\vec{v}_{i+1},\ldots,\vec{v}_k \rangle \subset V$, $\forall\, i = 1,2,\ldots,k$.
(iii) Τα διανύσματα $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k \in V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και τα $\vec{u},\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k \in V$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα $\forall\, \vec{u} \in V$.
(iv) $\langle \vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k \rangle = V$ και κάθε $\vec{u} \in V$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k$.

Άσκηση 7: Έστω $V \neq \{\vec{0}\}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k \in V$ με $\vec{v}_i \neq \vec{0}, \ \forall\, i = 1,2,\ldots,k$. Δείξτε ότι υπάρχει υποσύνολο του συνόλου $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k\}$ που να αποτελεί βάση του $\langle \vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k \rangle$.

Άσκηση 8: Έστω V είναι ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$, και $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k\}$ μια βάση του V. Έστω $\vec{u} \in V$ με $\vec{u} = \lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + \lambda_i\vec{v}_i + \ldots + \lambda_k\vec{v}_k$ όπου $\lambda_i \neq 0$. Δείξτε ότι και το σύνολο $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_{i-1},\vec{u},\vec{v}_{i+1},\ldots,\vec{v}_k\}$ είναι βάση του V.

Άσκηση 9: Βρείτε μια βάση του διανυσματικού χώρου των πινάκων 2×2.

Άσκηση 10: Βρείτε τη διάσταση και μια βάση του χώρου των συμμετρικών 3×3 πινάκων.

Άσκηση 11: Δείξτε ότι σε ένα πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, α) οι μη-μηδενικές γραμμές είναι γραμμικά ανεξάρτητες, και β) οι στήλες που περιέχουν οδηγούς είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητες.

Άσκηση 12: Εξετάστε αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τα διανύσματα:

α) $(0,1)$, $(1,1)$, β) $(1,1)$, $(0,1)$, $(1,0)$, γ) $(1,0,0)$, $(1,1,1)$, $(0,1,1)$

Άσκηση 13: Περιγράψτε τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^2$ που παράγεται από τα διανύσματα:

α) $(0,1)$, $(1,1)$, β) $(1,1)$, $(-1,-1)$, γ) $(1,1)$, $(0,1)$, $(1,0)$

Άσκηση 14: Εξετάστε αν τα διανύσματα $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(0,0,1,1)$, $(0,1,0,1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή όχι και ελέγξτε εάν το διάνυσμα $(0,0,0,1)$ βρίσκεται στο χώρο που παράγουν.

Άσκηση 15: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3 \in V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Εξετάστε αν είναι αληθές ότι και τα διανύσματα $\vec{w}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\vec{w}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_3$, $\vec{w}_3 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα.

Άσκηση 16: Θεωρούμε το σύνολο $V = \{\alpha x^2 + \beta x + \gamma \ \backslash \ a,b,\gamma \in \mathbb{R}\}$ των πολυωνύμων με σταθερούς συντελεστές.
α) Δείξτε ότι το V είναι πραγματικός γραμμικός χώρος και βρείτε μια βάση του.
β) Εξετάστε αν τα $\vec{v}_1 = x^2 - 2x + 3$, $\vec{v}_2 = x^2 - 1$, $\vec{v}_3 = x^2 + x + 1$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αποτελεί το $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ βάση του V;
γ) Εξετάστε αν τα $\vec{v}_1 = x^2$, $\vec{v}_2 = x^2 + 1$, $\vec{v}_3 = 3x^2 + 2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Άσκηση 17: Έστω V είναι ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ με $\dim V = k$. Δείξτε ότι:
α) Αν $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_m \in V$ με $m > k$, τότε τα $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_m$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
β) Αν $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k \in V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε αποτελούν βάση του V.
γ) Αν W είναι υπόχωρος του V, τότε: (i) $\dim W \leq \dim V$
(ii) Αν $\dim W = \dim V$, τότε $W = V$

Άσκηση 18: Έστω το σύνολο $V = \{(x,y,z) \ \backslash \ x = 2y = 3z, \ x,y,z \in \mathbb{R}\}$.
α) Δείξτε ότι το V είναι πραγματικός διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \ \backslash \ x,y,z \in \mathbb{R}\}$.
β) Βρείτε μια βάση του V και τη διάσταση του.
γ) Βρείτε διανύσματα που μαζί με τη βάση του V να αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 19: Έστω το σύνολο $V = \{(x,y,z) \ \backslash \ 2x + y + z = 0, \ x,y,z \in \mathbb{R}\}$. Δείξτε ότι το V είναι πραγματικός διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και βρείτε δύο διαφορετικές βάσεις του και τη διάσταση του.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ & ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (ΕΜ-111)

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΑΠΟ ΤΟ 5ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ

ΑΣΚΗΣΗ 1

α) Το $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \setminus x,y \in \mathbb{R}\}$ είναι εφοδιασμένο με μια εσωτερική πράξη πρόσθεσης $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, η οποία ορίζεται ως:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2) \in \mathbb{R}^2$$

$\forall \ \vec{v}_1 = (x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$ και $\vec{v}_2 = (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ με $x_1,x_2,y_1,y_2 \in \mathbb{R}$

Η πρόσθεση έχει τις ιδιότητες:

(i) $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_2+x_1, y_2+y_1) = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$ (αντιμετάθεση) $\forall \ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$

(ii) $\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (x_1,y_1) + (x_2+x_3, y_2+y_3) = (x_1+x_2+x_3, y_1+y_2+y_3) =$

$= (x_1+x_2, y_1+y_2) + (x_3,y_3) = (\vec{v}_1+\vec{v}_2) + \vec{v}_3$ (προσεταιριστικότ) $\forall \ \vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3 \in \mathbb{R}^2$

(iii) $\exists$ το στοιχείο $\vec{o} = (0,0) \in \mathbb{R}^2$, τ.ω.

$\vec{v}_1 + \vec{o} = (x_1,y_1) + (0,0) = (x_1,y_1) = \vec{v}_1$, $\forall \ \vec{v}_1 \in \mathbb{R}^2$

(iv) $\forall \ \vec{v}_1 = (x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$, $\exists \ (-x_1,-y_1) = -\vec{v}_1 \in \mathbb{R}^2$, τ.ω. $\vec{v}_1 + (-\vec{v}_1) = \vec{o}$

Δηλ. το $\mathbb{R}^2$ είναι αντιμεταθετική προσθετική ομάδα

Επίσης ορίζεται μια εξωτερική πράξη πολλ/σμού των $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}$ πάνω στο $\mathbb{R}^2$ δηλ. $\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε:

$$\lambda \vec{v}_1 = \lambda (x_1,y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{με } \lambda \in \mathbb{R}$$

Ο βαθμωτός πολλ/σμός έχει τις ιδιότητες:

(i) $(\lambda+\mu)\vec{v}_1 = (\lambda+\mu)(x_1,y_1) = ((\lambda+\mu)x_1, (\lambda+\mu)y_1) = (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda y_1 + \mu y_1) =$

$= (\lambda x_1, \lambda y_1) + (\mu x_1, \mu y_1) = \lambda(x_1,y_1) + \mu(x_1,y_1) = \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_1$ $\forall \ \lambda,\mu \in \mathbb{R}$ και $\forall \ \vec{v}_1 \in \mathbb{R}^2$

(ii) $\lambda(\vec{v}_1+\vec{v}_2) = \lambda(x_1+x_2, y_1+y_2) = (\lambda x_1 + \lambda x_2, \lambda y_1 + \lambda y_2) =$

$= (\lambda x_1, \lambda y_1) + (\lambda x_2, \lambda y_2) = \lambda\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2$, $\forall \ \lambda \in \mathbb{R}$ και $\forall \ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$

(iii) $\lambda(\mu\vec{v}_1) = \lambda(\mu x_1, \mu y_1) = (\lambda\mu x_1, \lambda\mu y_1) = (\lambda\mu)(x_1,y_1) = (\lambda\mu)\vec{v}_1$ $\forall \ \lambda,\mu \in \mathbb{R}$ και $\forall \ \vec{v}_1 \in \mathbb{R}^2$

(iv) $1\vec{v}_1 = 1(x_1,y_1) = (1x_1, 1y_1) = (x_1,y_1) = \vec{v}_1$, $\forall \ \vec{v}_1 \in \mathbb{R}^2$

Άρα το $\mathbb{R}^2$, με πράξεις την πρόσθεση και τον πολλ/σμό με πραγματικό αριθμό, είναι διανυσματικός χώρος.

β) $\forall \ \vec{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ έχουμε:

$\vec{v} = x(1,0) + y(0,1) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. Δηλαδή: $<\vec{e}_1, \vec{e}_2> = \mathbb{R}^2$

Επιπλέον, $\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (0,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda_1,\lambda_2) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$ δηλ. τα $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ είναι γρ. ανεξάρτητα και παράγουν τον $\mathbb{R}^2$. Άρα $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^2$ και $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Αν $f,g \in C_{[\alpha,b]}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, ορίζουμε:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in [\alpha,b]$

$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, $x \in [\alpha,b]$

δηλ. $f+g \in C_{[\alpha,b]}$ $\forall \ f,g \in C_{[\alpha,b]}$ και $\lambda f \in C_{[\alpha,b]}$, $\forall \ f \in C_{[\alpha,b]}$ και $\forall \ \lambda \in \mathbb{R}$

Ιδιότητες πρόσθεσης:

i) $f+g=g+f$, ii) $(f+g)+h=f+(g+h)$, $\forall f,g,h \in C_{[\alpha,b]}$

iii) $\exists$ μηδενική συνάρτηση $f_0(x)=0$ $\forall$ $x\in[\alpha,b]$

δηλ. $f+f_0=f$ $\forall$ $f\in C_{[\alpha,b]}$ όπου $f_0\in C_{[\alpha,b]}$

iv) $\forall$ $f\in C_{[\alpha,b]}$, $\exists$ $(-f)(x)=-f(x)\in C_{[\alpha,b]}$, τ.ω. $f+(-f)=f_0$

Ιδιότητες πολ/σμού:

i) $(\lambda+\mu)f=\lambda f+\mu f$, ii) $\lambda(f+g)=\lambda f+\lambda g$, $\forall f,g\in C_{[\alpha,b]}$ και $\forall \mu,\lambda\in\mathbb{R}$

iii) $(\lambda\mu)f=\lambda(\mu f)$

iv) $1f=f$

Άρα $C_{[\alpha,b]}$ είναι πραγματικός γραμμικός χώρος

ΑΣΚΗΣΗ 3

α) Αρκεί να δείξουμε ότι $\exists$ $A,B\in\mathbb{R}^{2\times2}$ μη-ιδιόμορφοι τ.ω. ο $A+B$ να είναι ιδιόμορφος (βλ. Άσκηση 14(α), φυλλάδιο 4). Δηλ. το σύνολο των μη-ιδιόμορφων 2x2 πινάκων δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και επομένως, δεν είναι διανυσματικός χώρος.

β) Αρκεί να βρούμε πίνακες $A,B\in\mathbb{R}^{2\times2}$ ιδιόμορφους, τ.ω. ο πίνακας $A+B$ να είναι μη-ιδιόμορφος (βλ. Άσκηση 14(β), φυλλάδιο 4). Δηλ. το σύνολο των ιδιόμορφων πινάκων 2x2 δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και επομένως, δεν είναι διανυσματικός χώρος.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$ είναι: 1) όλο το $\mathbb{R}^2$, 2) κάθε ευθεία που περνά από το $(0,0)$, και 3) το μονοσύνολο $\{(0,0)\}$

α) Ο V αποτελείται από τα σημεία της ευθείας $3x+y=0$ που περνά από το $(0,0)$ και άρα είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$

<u>2ος Τρόπος:</u> έστω $\vec{v}_1=(x_1,y_1)$, $\vec{v}_2=(x_2,y_2)$ οποιαδήποτε $v_1,v_2\in V$.

Τότε $\vec{v}_1+\vec{v}_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$ με $3(x_1+x_2)+(y_1+y_2)=$

$=(3x_1+y_1)+(3x_2+y_2)=0+0=0$ και άρα $\vec{v}_1+\vec{v}_2\in V$

Επίσης, $\forall$ $\vec{v}_1\in V$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ έχουμε: $\lambda\vec{v}_1=(\lambda x_1,\lambda y_1)$

με $3(\lambda x_1)+(\lambda y_1)=\lambda(3x_1+y_1)=\lambda 0=0$ και άρα $\lambda\vec{v}_1\in V$

Άρα $V\subseteq\mathbb{R}^2$ κλειστό ως προς πρόσθεση & βαθμωτό πολ/σμό $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ V διανυσμ. υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$

β) Ο V αποτελείται από τα σημεία της ευθείας $3(x+2)=5y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x+6=5y$ η οποία δεν περνά από το $(0,0)$ και άρα ο V δεν είναι διανυσμ. υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

<u>2ος Τρόπος:</u> $\forall$ $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$ έχουμε:

$\vec{v}_1+\vec{v}_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$ και $3[(x_1+x_2)+2]=3[(x_1+2)+x_2]=$

$=3(x_1+2)+3x_2=5y_1+5y_2-6=5(y_1+y_2)-6\neq 5(y_1+y_2)$

και άρα $\vec{v}_1+\vec{v}_2\notin V$

οπότε V δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$

γ) Ο V αποτελείται από τα σημεία της ευθείας $3(x+2)-5y=6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x+6-5y=6 \Leftrightarrow 3x=5y$ που περνά από το $(0,0)$

και επομένως το V είναι διανυσμ. υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

(<u>2ος Τρόπος:</u> όπως ερώτημα (α))

δ) $x^2+y^2=0 \underset{x,y\in\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} (x,y)=(0,0)$

Άρα $V=\{(0,0)\}$ δηλ. ο τετριμμένος υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Αφού τα $\vec{u},\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, $\exists\ \mu,\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_k\in\mathbb{F}$ όχι όλα μηδέν, έτσι ώστε: $\mu\vec{u}+\mu_1\vec{v}_1+\mu_2\vec{v}_2+\dots+\mu\vec{v}_k=\vec{0}$. (1)

Αν $\mu=0$ τότε $\mu_1\vec{v}_1+\mu_2\vec{v}_2+\dots+\mu_k\vec{v}_k=\vec{0}$ με κάποιο από τα $\mu_i\neq0$ που είναι άτοπο αφού $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Άρα $\mu\neq0$, οπότε: $(1)\Rightarrow \vec{u}=\left(-\frac{\mu_1}{\mu}\right)\vec{v}_1+\left(-\frac{\mu_2}{\mu}\right)\vec{v}_2+\dots+\left(-\frac{\mu_k}{\mu}\right)\vec{v}_k$

ΑΣΚΗΣΗ 6

(i) ⇒ (ii): Έστω ότι $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k\}$ βάση του V. Άρα:

$\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k\rangle=V$. Επίσης, $\vec{v}_i\notin\langle\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_{i-1},\vec{v}_{i+1},\dots,\vec{v}_k\rangle$ γιατί αλλιώς θα υπήρχαν $\lambda_1,\dots\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\dots,\lambda_k\in\mathbb{F}$ τ.ω.

$\vec{v}_i=\lambda_1\vec{v}_1+\dots+\lambda_{i-1}\vec{v}_{i-1}+\lambda_{i+1}\vec{v}_{i+1}+\dots+\lambda_k\vec{v}_k \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1\vec{v}_1+\dots+\lambda_{i-1}\vec{v}_{i-1}+(-1)\vec{v}_i+\lambda_{i+1}\vec{v}_{i+1}+\dots+\lambda_k\vec{v}_k=\vec{0}$

που είναι άτοπο αφού $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (ως στοιχεία βάσης).

Άρα: $\vec{v}_i\notin\langle\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_{i-1},\vec{v}_{i+1},\dots,\vec{v}_k\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_{i-1},\vec{v}_{i+1},\dots,\vec{v}_k\rangle\subset V,\quad \forall\ i=1,2,\dots,k$

(ii) ⇒ (iii): Έστω ότι ισχύει το (ii), και $\lambda_1\vec{v}_1+\dots+\lambda_k\vec{v}_k=\vec{0}$, με $\lambda_1,\dots\lambda_k\in\mathbb{F}$.
Αν για κάποιο $i\in\{1,\dots,k\}$, $\exists\ \lambda_i\neq0$, τότε

$$\vec{v}_i=\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)\vec{v}_1+\dots+\left(-\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\right)\vec{v}_{i-1}+\left(-\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right)\vec{v}_{i+1}+\dots+\left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right)\vec{v}_k$$

Άρα: $\vec{v}_i\in\langle\vec{v}_1,\dots\vec{v}_{i-1},\vec{v}_{i+1},\dots,\vec{v}_k\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_{i-1},\vec{v}_{i+1},\dots\vec{v}_k\rangle=\langle\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k\rangle=V$ που είναι άτοπο λόγω της υπόθεσης (ii). Άρα $\nexists\ \lambda_i\neq0$ για κανένα $i\in\{1,\dots,k\}$, δηλ. $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_k=0$, και επομένως τα $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Έστω τώρα $\vec{u}\in V \Rightarrow \vec{u}\in\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k\rangle$, άρα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k$ και επομένως τα $\vec{u},\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k$ είναι γρ. εξαρτημένα, $\forall\ \vec{u}\in V$.

(iii) ⇒ (iv): Έστω ότι ισχύει το (iii). Από την Άσκηση 1, έχουμε: $\vec{u}\in\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k\rangle$, $\forall\ \vec{u}\in V$. Άρα $V\subseteq\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k\rangle$ που επειδή $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k\in V$ δίνει $\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k\rangle=V$.

Επίσης, $\vec{u}\in\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k\rangle \Rightarrow \vec{u}=\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\dots+\lambda_k\vec{v}_k$ με $\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_k\in\mathbb{F}$

Έστω ότι $\exists$ και $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_k\in\mathbb{F}$ τ.ω. $\vec{u}=\mu_1\vec{v}_1+\mu_2\vec{v}_2+\dots+\mu_k\vec{v}_k$.

Άρα $(\lambda_1-\mu_1)\vec{v}_1+(\lambda_2-\mu_2)\vec{v}_2+\dots+(\lambda_k-\mu_k)\vec{v}_k=\vec{0}$, η οποία, επειδή $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k$ είναι γρ. ανεξάρτητα, δίνει $\lambda_i-\mu_i=0\Rightarrow\lambda_i=\mu_i$, $\forall\ i\in\{1,2,\dots,k\}$

Επομένως, κάθε διάνυσμα $\vec{u}\in V$ γράφεται ως γρ. συνδυασμός των $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k$ κατά μοναδικό τρόπο.

(iv) ⟶ (i): Έστω ότι ισχύει το (iv). Αφού τα $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k$ παράγουν το V, αρκεί να δείξουμε ότι είναι και γρ. ανεξάρτητα για να είναι βάση του V. Έστω $\lambda_1\vec{v}_1+\dots+\lambda_k\vec{v}_k=\vec{0}$, με $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{F}$.

Επίσης, $\vec{0}=0\vec{v}_1+\dots+0\vec{v}_k$ και επειδή κάθε $\vec{u}\in V$ (άρα και το $\vec{0}$) γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γρ. συνδυασμός των $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k$, συνεπάγεται ότι $\lambda_1=0,\lambda_2=0,\dots,\lambda_k=0$. Άρα τα $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k$ είναι γρ. ανεξάρτητα και επειδή $\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k\rangle=V$ το σύνολο $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k\}$ είναι βάση του V.

ΑΣΚΗΣΗ 7

- Αν $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ είναι γρ. ανεξάρτητα, τότε εξ' ορισμού το $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ είναι βάση του $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \rangle$
- Αν $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ είναι γρ. εξαρτημένα με π.χ. $\vec{v}_k = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_{k-1}\vec{v}_{k-1}$ για $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1} \in \mathbb{F}$, τότε $\vec{v}_k \in \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{k-1} \rangle$ και επομένως

$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{k-1} \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{k-1}, \vec{v}_k \rangle$

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{k-1}$ και συνεχίζοντας θα φτάσουμε σε κάποιο σύνολο $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ με $m \in \mathbb{N}$ και $1 \le m < k$ τ.ω. $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \rangle$ και $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ γρ. ανεξάρτητα, οπότε $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ είναι βάση του $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \rangle$.

Σημειώνεται ότι είναι αδύνατον να βρίσκουμε συνέχεια γρ. εξαρτημένα διανύσματα μ' αυτήν τη διαδικασία. Π.χ. αν φτάναμε στο ότι $\langle \vec{v}_1 \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \rangle$, τότε το $\vec{v}_1$ είναι γρ. ανεξάρτητο (αφού $\lambda_1 \vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \vec{0}$, για $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$) και επομένως βάση του $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \rangle$.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Έστω $\mu_1 \vec{v}_1 + \dots + \mu_{i-1}\vec{v}_{i-1} + \mu \vec{u} + \mu_{i+1}\vec{v}_{i+1} + \dots + \mu_k \vec{v}_k = \vec{0}$ (1)

με $\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \dots, \mu_k, \mu \in \mathbb{F}$. Εφόσον $\vec{u} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_i \vec{v}_i + \dots + \lambda_k \vec{v}_k$, η εξίσωση (1) δίνει: $\mu_1 \vec{v}_1 + \dots + \mu_{i-1}\vec{v}_{i-1} + \mu(\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_i \vec{v}_i + \dots \lambda_k \vec{v}_k) + \mu_{i+1}\vec{v}_{i+1} + \dots + \mu_k \vec{v}_k = \vec{0}$

$\Rightarrow (\mu_1 + \mu\lambda_1)\vec{v}_1 + \dots + (\mu\lambda_i)\vec{v}_i + \dots + (\mu_k + \mu\lambda_k)\vec{v}_k = \vec{0}$

η οποία επειδή $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ είναι βάση και άρα γρ. ανεξάρτητα δίνει:

$$\left.\begin{cases} \mu_1 + \mu\lambda_1 = 0 \\ \mu_2 + \mu\lambda_2 = 0 \\ \vdots \\ \mu\lambda_i = 0 \Rightarrow \mu = 0 \quad (\text{εφόσον } \lambda_i \neq 0) \\ \vdots \\ \mu_k + \mu\lambda_k = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_{i-1} = \mu = \mu_{i+1} = \dots = \mu_k = 0$$

οπότε από την (1) έχουμε ότι τα $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{u}, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_k$ είναι γρ. ανεξάρτητα

Επίσης, $\vec{u} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_i \vec{v}_i + \dots + \lambda_k \vec{v}_k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{v}_i = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)\vec{v}_1 + \dots + \frac{1}{\lambda_i}\vec{u} + \dots + \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right)\vec{v}_k \qquad (2)$$

Κάθε διάνυσμα $\vec{w} \in V$ γράφεται ως γρ. συνδυασμός της βάσης $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_k\}$

Άρα, $\forall \vec{w} \in V$ έχουμε: $\vec{w} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_i \vec{v}_i + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$ με $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (2), προκύπτει:

$$\vec{w} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_i \left[\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)\vec{v}_1 + \dots + \frac{1}{\lambda_i}\vec{u} + \dots + \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right)\vec{v}_k\right] + \dots + \alpha_k \vec{v}_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{w} = \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_i}{\lambda_i}\lambda_1\right)\vec{v}_1 + \dots + \frac{\alpha_i}{\lambda_i}\vec{u} + \dots \left(\alpha_k - \frac{\alpha_i}{\lambda_i}\lambda_k\right)\vec{v}_k$$

δηλ. $\vec{w} \in \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{u}, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_k \rangle$, $\forall \vec{w} \in V$ και επειδή τα $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{u}, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_k$ είναι γρ. ανεξάρτητα, αποτελούν βάση του V.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Έστω $\{A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}^{2\times 2}\}$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_n A_n = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \begin{bmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} \alpha_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{bmatrix} \alpha_n & b_n \\ c_n & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{bmatrix} \alpha_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Δηλ. $\{A_1, A_2, \dots, A_n$ γραμ. ανεξάρτητοι$\}$ ανν $\{(\alpha_1, b_1, c_1, d_1), (\alpha_2, b_2, c_2, d_2), \dots$
$\dots, (\alpha_n, b_n, c_n, d_n) \in \mathbb{R}^4$ γρ. ανεξάρτητα$\}$

Άρα $\dim \mathbb{R}^{2\times 2} = \dim \mathbb{R}^4 = 4$ και

$\{A_1, A_2, A_3, A_4$ βάση του $\mathbb{R}^{2\times 2}\}$ ανν $\{(\alpha_1, b_1, c_1, d_1), (\alpha_2, b_2, c_2, d_2), (\alpha_3, b_3, c_3, d_3),$
$(\alpha_4, b_4, c_4, d_4)$ βάση του $\mathbb{R}^4\}$

Έτσι, αν επιλέξουμε την κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$:
$\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ έχουμε τη βάση
του $\mathbb{R}^{2\times 2}$: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Στην Άσκηση 17 του 4ου Φυλλαδίου, δείξαμε ότι σε ένα συμμετρικό $n\times n$ πίνακα είναι δυνατόν να οριστούν ανεξάρτητα $n(n+1)/2$ στοιχεία. Δηλ. σε ένα συμμετρικό 3Χ3 πίνακα μπορούν να οριστούν ανεξάρτητα 6 στοιχεία.

Δηλ. $A = \begin{bmatrix} \alpha & b & c \\ b & d & f \\ c & f & g \end{bmatrix}$ με $\alpha, b, c, d, f, g \in \mathbb{R}$

Με διαδικασία παρόμοια με αυτήν της Άσκησης 9 παραπάνω, μπορούμε να δείξουμε ότι $\dim V = \dim \mathbb{R}^6 = 6$

όπου $V = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \setminus (A)_{ij} = (A)_{ji}$ για $i = 1,2,3$ και $j = 1,2,3\}$

και μια βάση του V (που αντιστοιχεί στην κανονική βάση του $\mathbb{R}^6$) είναι η:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ΑΣΚΗΣΗ 11

α)
$$U = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \alpha_{1j_1} & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_{2j_2} & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \alpha_{pj_p} & \cdots * \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots 0 \end{bmatrix}$$

Δηλ. $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$ με p μη-μηδενικές γραμμές και τους οδηγούς $\alpha_{1j_1}, \alpha_{2j_2}, \dots, \alpha_{pj_p}$ στις στήλες $j_1, j_2, \dots, j_p$

Αν $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \dots, \vec{r_p}$ τα διανύσματα των μη-μηδενικών γραμμών και

$$\lambda_1\vec{r_1} + \lambda_2\vec{r_2} + \dots + \lambda_p\vec{r_p} = \vec{0} \quad \text{με } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$$

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \alpha_{1j_1} & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_{2j_2} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_{pj_p} & \cdots * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$ είναι η μοναδική λύση αυτού του συστήματος

Ο πολλ/σμός του $[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_p]$ με την j_1 στήλη δίνει $\lambda_1 \alpha_{1j_1} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$
(μιας και $\alpha_{1j_1} \neq 0$)

Υποθέτουμε ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ για $k < p$ και θα δείξουμε επαγωγικά ότι $\lambda_{k+1} = 0$ $(\forall k < p)$

Πολλ/σμός του $[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_p]$ με την j_{k+1} στήλη δίνει

$\lambda_1 \alpha_{1j_{k+1}} + \lambda_2 \alpha_{2j_{k+1}} + \dots + \lambda_k \alpha_{kj_{k+1}} + \lambda_{k+1} \alpha_{(k+1)j_{k+1}} = 0 \Rightarrow \lambda_{k+1} \alpha_{(k+1)j_{k+1}} = 0 \Rightarrow \lambda_{k+1} = 0$
(αφού $\alpha_{(k+1)j_{k+1}} \neq 0$)

Άρα, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$ και τα $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \dots, \vec{r_p}$ είναι γρ. ανεξάρτητα β) Σχηματίζουμε τον πίνακα U' με στήλες τις στήλες U που περιέχουν οδηγούς, δηλ.

$$U' = \begin{bmatrix} \alpha_{1j_1} & * & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_{2j_2} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \alpha_{3j_3} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{\rho j_\rho} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

και $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_\rho)$ διάνυσμα τ.ω. $U'\vec{c} = \vec{0}$

Εφαρμόζοντας ανάδρομη αντικατάσταση ξεκινώντας από την ρ-γραμμή έχουμε: $\alpha_{\rho j_\rho} c_\rho = 0 \Rightarrow c_\rho = 0$ (αφού $\alpha_{\rho j_\rho} \neq 0$)

$(\rho-1)$-γραμμή: $\alpha_{(\rho-1)j_{\rho-1}} c_{\rho-1} + \alpha_{(\rho-1)j_\rho} \cancel{c_\rho}^{0} = 0 \Rightarrow c_{\rho-1} = 0$ (αφού αφού $\alpha_{(\rho-1)j_{\rho-1}} \neq 0$)

Επαγωγικά, έστω ότι $c_\rho = c_{\rho-1} = \ldots = c_{\rho-\kappa} = 0$ για $\kappa < \rho - 1$

τότε:

$(\rho-\kappa-1)$-γραμμή: $\alpha_{(\rho-\kappa-1)j_{(\rho-\kappa-1)}} c_{\rho-\kappa-1} + \alpha_{(\rho-\kappa-1)j_{\rho-\kappa}} \cancel{c_{\rho-\kappa}}^{0} + \ldots + \alpha_{(\rho-\kappa-1)j_\rho} \cancel{c_\rho}^{0} = 0$

$\Rightarrow \alpha_{(\rho-\kappa-1)j_{(\rho-\kappa-1)}} c_{\rho-\kappa-1} = 0 \Rightarrow c_{\rho-\kappa-1} = 0$ (αφού $\alpha_{(\rho-\kappa-1)j_{(\rho-\kappa-1)}} \neq 0$)

$\forall\ \kappa < \rho - 1$

Άρα, $c_1 = c_2 = \cdots = c_\rho = 0$ και οι στήλες του U' είναι γρ. ανεξάρτητες.

ΑΣΚΗΣΗ 12

α) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)\,(+)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = U$, άρα $r(A) = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dim N(A) = n - r(A) = 0$

άρα μοναδική λύση του $A\vec{c} = \vec{0}$ είναι $\vec{c} = \vec{0}$
και επομένως τα διανύσματα γρ. ανεξάρτητα

β) $(1,1), (0,1), (1,0) \in \mathbb{R}^2$

Όμως $\dim \mathbb{R}^2 = 2 =$ μέγιστο πλήθος γρ. ανεξάρτ. διανυσμάτων του $\mathbb{R}^2$
άρα $(1,1), (0,1), (1,0)$ είναι γρ. εξαρτημένα

γ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)\,(+)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$

άρα: $r(A) = 2 \Rightarrow \dim N(A) = n - r(A) = 3 - 2 = 1 \neq 0$
άρα $\exists$ μη-μηδενικές λύσεις $(\vec{c} \neq \vec{0})$ για το σύστημα $A\vec{c} = \vec{0}$
και επομένως τα τρία διανύσματα είναι γρ. εξαρτημένα.

ΑΣΚΗΣΗ 13

α) Από την άσκηση 12(α) έχουμε ότι $(0,1), (1,1)$ είναι γρ. ανεξάρτητα.
Επίσης, $(0,1), (1,1) \in \mathbb{R}^2$ και $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, άρα
$\langle (0,1), (1,1) \rangle = \mathbb{R}^2$ και $\{(0,1), (1,1)\}$ βάση του $\mathbb{R}^2$

β) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)\,(+)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U$, άρα $r(A) = 1$

και $\dim N(A) = n - r(A) = 2 - 1 = 1 \neq 0$, άρα το σύστημα $A\vec{c} = \vec{0}$ έχει μη-μηδενικές λύσεις $(\vec{c} \neq \vec{0})$, οπότε τα $(-1,-1)$ και $(1,1)$ είναι γρ. εξαρτημένα, και παράγουν τον χώρο
$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (x,y) = \lambda(1,1)\} \Rightarrow V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus x = y\}$
δηλ. ο V αποτελείται από τα σημεία της ευθείας $y = x$.

γ) $(0,1), (1,0), (1,1) \in \mathbb{R}^2$ (3 διανύσματα του $\mathbb{R}^2$) άρα γρ. εξαρτημένα
(αφού $\dim \mathbb{R}^2 = 2$)
Όμως $\{(0,1), (1,0)\} =$ κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$, άρα

$<(1,1),(0,1),(1,0)> = \mathbb{R}^2$

ΑΣΚΗΣΗ 14

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{array}{l}(-1)\\ (+)\\ \\ \\ \end{array}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ 1\\ (+)\\ \\ \end{array}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (-1)\\ (+)\end{array}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=U$$

, άρα $r(A)=[\text{πλήθος μη-μηδεν. γραμμών του } U]$
$\Rightarrow r(A)=3$

και $\dim N(A) = n - r(A) = 4-3 = 1 \neq 0$

άρα $\exists\ \vec{c}\neq 0$ τ.ω. $A\vec{c}=\vec{0}$ και τα διανύσματα είναι γρ. εξαρτημένα

Το διάνυσμα $(0,0,0,1)$ βρίσκεται στο χώρο που παράγουν ανν $\exists$ $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4 \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}+\lambda_4\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

η τελευταία γραμμή δίνει $0\lambda_1+0\lambda_2+0\lambda_3+0\lambda_4=1$, άρα το σύστημα είναι ασύμβατο και επομένως,

$(0,0,0,1) \notin <(1,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,1,1),(0,1,0,1)>$

ΑΣΚΗΣΗ 15

Έστω $\lambda_1\vec{w}_1+\lambda_2\vec{w}_2+\lambda_3\vec{w}_3=\vec{0}$, με $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{F}$

$\Rightarrow \lambda_1(\vec{v}_1+\vec{v}_2)+\lambda_2(\vec{v}_1+\vec{v}_3)+\lambda_3(\vec{v}_2+\vec{v}_3)=\vec{0}$

$\Rightarrow \lambda_1\vec{v}_1+\lambda_1\vec{v}_2+\lambda_2\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_3+\lambda_3\vec{v}_2+\lambda_3\vec{v}_3=\vec{0}\Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda_1+\lambda_2)\vec{v}_1+(\lambda_1+\lambda_3)\vec{v}_2+(\lambda_2+\lambda_3)\vec{v}_3=\vec{0}$

η οποία, αφού $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ είναι γρ. ανεξάρτητα, δίνει:

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda_1+\lambda_2=0\\\lambda_1+\lambda_3=0\\\lambda_2+\lambda_3=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\qquad(1)$$

Έστω
$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{array}{l}(-1)\\ (+)\\ \\ \end{array}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ 1\\ (+)\end{array}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&2\end{bmatrix}=U$$

Άρα $r(A)=[\text{πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του } U]=3$

και $\dim N(A)=n-r(A)=3-3=0$

Άρα $N(A)=\{(0,0,0)\}$ δηλ. μοναδική λύση της (1) είναι η $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0)$ και επομένως τα $\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3$ είναι γρ. ανεξάρτητα

ΑΣΚΗΣΗ 16

α) Έστω $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$ με $\vec{v}_i=\alpha_iX^2+\beta_iX+\gamma_i$ για $i=1,2$

Τότε: $\vec{v}_1+\vec{v}_2=(\alpha_1X^2+\beta_1X+\gamma_1)+(\alpha_2X^2+\beta_2X+\gamma_2)=$
$=(\alpha_1+\alpha_2)X^2+(\beta_1+\beta_2)X+(\gamma_1+\gamma_2)\ \in V$

Ιδιότητες πρόσθεσης:

i) $\vec{v}_1+\vec{v}_2=(\alpha_1+\alpha_2)X^2+(\beta_1+\beta_2)X+(\gamma_1+\gamma_2)=\vec{v}_2+\vec{v}_1$, $\forall\ \vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$

ii) $\vec{v}_1+(\vec{v}_2+\vec{v}_3)=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)X^2+(\beta_1+\beta_2+\beta_3)X+(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)=$
$=(\vec{v}_1+\vec{v}_2)+\vec{v}_3$, $\forall\ \vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\in V$

iii) $\exists\ \vec{0}=0X^2+0X+0\in V$, τ.ω. $\vec{v}_1+\vec{0}=\vec{v}_1$, $\forall\ \vec{v}_1\in V$

iv) $\forall\ \vec{v}_1=\alpha_1X^2+\beta_1X+\gamma_1$, $\exists\ (-\vec{v}_1)=(-\alpha_1)X^2+(-\beta_1)X+(-\gamma_1)\in V$, τ.ω.
$\vec{v}_1+(-\vec{v}_1)=0$

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\vec{V}_1 \in V$. Τότε $\lambda\vec{V}_1 = (\lambda\alpha_1)X^2 + (\lambda\beta_1)X + (\lambda\gamma_1) \in V$

Ιδιότητες του πολ/σμού με πραγματικό αριθμό:

i) $(\lambda+\mu)\vec{V}_1 = (\lambda+\mu)(\alpha_1X^2+\beta_1X+\gamma_1) = \lambda(\alpha_1X^2+\beta_1X+\gamma_1)+\mu(\alpha_1X^2+\beta_1X+\gamma_1) =$

$= \lambda\vec{V}_1 + \mu\vec{V}_1 \quad , \quad \forall\, \lambda,\mu\in\mathbb{R}\, , \ \vec{V}_1\in V$

ii) $\lambda(\vec{V}_1+\vec{V}_2) = \lambda(\alpha_1+\alpha_2)X^2 + \lambda(\beta_1+\beta_2)X + \lambda(\gamma_1+\gamma_2) =$

$= \lambda(\alpha_1X^2+\beta_1X+\gamma_1) + \lambda(\alpha_2X^2+\beta_2X+\gamma_2) =$

$= \lambda\vec{V}_1 + \lambda\vec{V}_2 \ , \quad \forall\, \vec{V}_1,\vec{V}_2\in V$ και $\lambda\in\mathbb{R}$

iii) $(\lambda\mu)\vec{V}_1 = (\lambda\mu)(\alpha_1X^2+\beta_1X+\gamma_1) = \lambda(\mu\alpha_1X^2+\mu\beta_1X+\mu\gamma_1) =$

$= \lambda(\mu\vec{V}_1) \quad , \quad \forall\, \lambda,\mu\in\mathbb{R}$ και $\vec{V}_1\in V$

iv) $1\vec{V}_1 = 1(\alpha_1X^2+\beta_1X+\gamma_1) = \vec{V}_1 \quad , \quad \forall\, \vec{V}_1\in V$

Άρα το V είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος.

$\forall\, \vec{V}_1\in V$ έχουμε: $\alpha_1X^2+\beta_1X+\gamma_1 = \alpha_1(X^2+0X+0) + \beta_1(0X^2+X+0) +$
$+ \gamma_1(0X^2+0X+1)$. Άρα τα μονώνυμα: $\vec{e}_1 = X^2$, $\vec{e}_2 = X$, $\vec{e}_3 = 1$
παράγουν τον V (δηλ. $<\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3> = V$). Επιπλέον:

$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1X^2 + \lambda_2X + \lambda_3 = 0 \quad (\forall X) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Άρα τα $X^2, X, 1$ είναι γρ. ανεξάρτητα και παράγουν το V, οπότε το $\{X^2,X,1\}$ είναι μια βάση του V.

β) Έστω $\lambda_1\vec{V}_1 + \lambda_2\vec{V}_2 + \lambda_3\vec{V}_3 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1(X^2-2X+3) + \lambda_2(X^2-1) +$
$+\lambda_3(X^2+X+1) = 0 \Rightarrow (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)X^2 + (-2\lambda_1+\lambda_3)X + (3\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)1 = 0 \quad (\forall X)$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \\ -2\lambda_1+\lambda_3=0 \\ 3\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Άρα $r(A) = 3$ και $\dim N(A) = 3 - r(A) = 0$

δηλ. μοναδική λύση είναι η $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (0,0,0)$

και άρα τα $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Εφόσον $\dim V = 3$, κάθε 3άδα γρ. ανεξάρτητων διανυσμάτων του V αποτελεί βάση του V, άρα και τα $\{\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{V}_3\}$

γ) Έστω $\lambda_1\vec{V}_1 + \lambda_2\vec{V}_2 + \lambda_3\vec{V}_3 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1X^2 + \lambda_2(X^2+1) + \lambda_3(3X^2+2) = 0$

$\Rightarrow (\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3)X^2 + 0X + (\lambda_2+2\lambda_3)1 = 0 \quad (\forall X)$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{r} \lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3=0 \\ \lambda_2+2\lambda_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Έστω $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ και $\dim N(U) = 3 - r(U) = 1 > 0$

άρα $\exists$ μη-μηδενικές 3άδες $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ και τα $\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{V}_3$ είναι γρ. εξαρτημένα.

ΑΣΚΗΣΗ 17

α) Έστω $\{\vec{U}_1,\vec{U}_2,\ldots,\vec{U}_k\}$ μια βάση του V. Τότε $\exists\ \mu_{ij}\in\mathbb{F}$ με $i\in\{1,\ldots,m\}$ και $j\in\{1,\ldots,k\}$ τέτοια ώστε:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{V}_1 = \mu_{11}\vec{U}_1 + \mu_{12}\vec{U}_2 + \ldots + \mu_{1k}\vec{U}_k \\ \vec{V}_2 = \mu_{21}\vec{U}_1 + \mu_{22}\vec{U}_2 + \ldots + \mu_{2k}\vec{U}_k \\ \vdots \\ \vec{V}_m = \mu_{m1}\vec{U}_1 + \mu_{m2}\vec{U}_2 + \ldots + \mu_{mk}\vec{U}_k \end{array}\right\} \quad (1)$$

Έστω $\lambda_1\vec{V}_1 + \lambda_2\vec{V}_2 + \ldots + \lambda_m\vec{V}_m = \vec{0} \quad (2)$

Αντικαθιστώντας τα $\vec{V}_1,\vec{V}_2,\ldots,\vec{V}_m$ από την (1) στη (2) προκύπτει:

$$\lambda_1\left(\mu_{11}\vec{u}_1+\mu_{12}\vec{u}_2+\ldots+\mu_{1k}\vec{u}_k\right)+\lambda_2\left(\mu_{21}\vec{u}_1+\mu_{22}\vec{u}_2+\ldots+\mu_{2k}\vec{u}_k\right)+\ldots$$
$$+\lambda_m\left(\mu_{m1}\vec{u}_1+\mu_{m2}\vec{u}_2+\ldots+\mu_{mk}\vec{u}_k\right)=\vec{0}\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\lambda_1\mu_{11}+\lambda_2\mu_{21}+\ldots+\lambda_m\mu_{m1}\right)\vec{u}_1+\left(\lambda_1\mu_{12}+\lambda_2\mu_{22}+\ldots+\lambda_m\mu_{m2}\right)\vec{u}_2+\ldots$$
$$+\left(\lambda_1\mu_{1k}+\lambda_2\mu_{2k}+\ldots+\lambda_m\mu_{mk}\right)\vec{u}_k=\vec{0}$$

η οποία, επειδή $\vec{u}_1,\vec{u}_2,..,\vec{u}_k$ είναι γρ. ανεξάρτητα (αφού είναι βάση του V), δίνει:

$$\begin{cases}\mu_{11}\lambda_1+\mu_{21}\lambda_2+\ldots+\mu_{m1}\lambda_m=0\\ \mu_{12}\lambda_1+\mu_{22}\lambda_2+\ldots+\mu_{m2}\lambda_m=0\\ \vdots \\ \mu_{1k}\lambda_1+\mu_{2k}\lambda_2+\ldots+\mu_{mk}\lambda_m=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}\mu_{11}&\mu_{21}&\ldots&\mu_{m1}\\ \mu_{12}&\mu_{22}&\ldots&\mu_{m2}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \mu_{1k}&\mu_{2k}&\ldots&\mu_{mk}\end{bmatrix}}_{\substack{A\\(k\times m)}}\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_m\end{bmatrix}}_{\substack{\vec{C}\\(m\times 1)}}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}}_{\substack{\vec{0}\\(k\times 1)}}\qquad(3)$$

Έχουμε: $\dim N(A)=[\text{πλήθος στηλών}]-[\text{Τάξη του } A]\Rightarrow$

$$\Rightarrow\dim N(A)=m-r(A)\underset{r(A)\le k}{\Longrightarrow}\dim N(A)\ge m-k>0$$

Άρα $\dim N(A)>0$, οπότε το σύστημα $A\vec{C}=\vec{0}$ έχει μη-μηδενικές λύσεις, δηλ. $\exists\ \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ όχι όλα μηδέν τ.ω. να ισχύει η (2) και επομένως τα $v_1,v_2,\ldots,v_m$ είναι γρ. εξαρτημένα

β) Σ' αυτήν την περίπτωση $m=k$ και το σύστημα (3) έχει μοναδική λύση τη $\vec{C}=\vec{0}$, δηλ. $\dim N(A)=0\Rightarrow k=r(A)$. Άρα ο $k\times k$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, και (1) δίνει:

$$\begin{bmatrix}\vec{v}_1\\ \vec{v}_2\\ \vdots\\ \vec{v}_k\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}\vec{u}_1\\ \vec{u}_2\\ \vdots\\ \vec{u}_k\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\vec{u}_1\\ \vec{u}_2\\ \vdots\\ \vec{u}_k\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}\vec{v}_1\\ \vec{v}_2\\ \vdots\\ \vec{v}_k\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\vec{u}_1\\ \vec{u}_2\\ \vdots\\ \vec{u}_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_{11}&\xi_{12}&\ldots&\xi_{1k}\\ \xi_{21}&\xi_{22}&\ldots&\xi_{2k}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \xi_{k1}&\xi_{k2}&\ldots&\xi_{kk}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{v}_1\\ \vec{v}_2\\ \vdots\\ \vec{v}_k\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}_1=\xi_{11}\vec{v}_1+\xi_{12}\vec{v}_2+\ldots+\xi_{1k}\vec{v}_k\\ \vec{u}_2=\xi_{21}\vec{v}_1+\xi_{22}\vec{v}_2+\ldots+\xi_{2k}\vec{v}_k\\ \vdots\\ \vec{u}_k=\xi_{k1}\vec{v}_1+\xi_{k2}\vec{v}_2+\ldots+\xi_{kk}\vec{v}_k\end{cases}\qquad(4)$$

Επειδή το $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_k\}$ είναι βάση του V, κάθε διάνυσμα $\vec{w}\in V$ γράφεται ως $\vec{w}=\alpha_1\vec{u}_1+\alpha_2\vec{u}_2+\ldots+\alpha_k\vec{u}_k$, με $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{F}$ η οποία, αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (4) δίνει:

$$\vec{w}=\alpha_1\left(\xi_{11}\vec{v}_1+\xi_{12}\vec{v}_2+\ldots+\xi_{1k}\vec{v}_k\right)+\alpha_2\left(\xi_{21}\vec{v}_1+\xi_{22}\vec{v}_2+\ldots+\xi_{2k}\vec{v}_k\right)+\ldots$$
$$+\alpha_k\left(\xi_{k1}\vec{v}_1+\xi_{k2}\vec{v}_2+\ldots+\xi_{kk}\vec{v}_k\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\vec{w}=\left(\alpha_1\xi_{11}+\alpha_2\xi_{21}+\ldots+\alpha_k\xi_{k1}\right)\vec{v}_1+\left(\alpha_1\xi_{12}+\alpha_2\xi_{22}+\ldots+\alpha_k\xi_{k2}\right)\vec{v}_2+\ldots$$
$$+\left(\alpha_1\xi_{1k}+\alpha_2\xi_{2k}+\ldots+\alpha_k\xi_{kk}\right)\vec{v}_k$$

δηλ. κάθε $\vec{w}\in V$ γράφεται ως γρ. συνδυασμός των $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k$. Άρα $V=\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k\rangle$ και επειδή $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k$ είναι γρ. ανεξάρτητα αποτελούν μια βάση του V.

γ) i) Στο ερώτημα (α) είδαμε ότι αν $\dim V=k$, τότε $\nexists$ σύνολο με περισσότερα από k γρ. ανεξάρτητα διανύσματα. Άρα αν $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_m\}$ μια βάση του $W\subseteq V$, δεν μπορεί να είναι $m>k$. Άρα: $m\le k\Rightarrow\dim W\le\dim V$

ii) Έστω $\dim W=\dim V=k$ και $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k\}$ μια οποιαδήποτε βάση του W. Εφόσον $W\subseteq V$, τα $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k\in V$ και επιπλέον είναι γρ. ανεξάρτητα. Στο ερώτημα (β) είδαμε ότι οποιαδήποτε k-άδα γρ. ανεξάρτητων διανυσμάτων του V είναι βάση του. Άρα: $\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k\rangle=V$ δηλ. $W=V$

ΑΣΚΗΣΗ 18

α) Προφανώς $V \subseteq \mathbb{R}^3$ (εφόσον περιέχει 3άδες πραγματικών αριθμών)
και $V \neq \emptyset$ (ένα προφανές διάνυσμα του V είναι το (0,0,0))
Επιπλέον $\forall\ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ με $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$
έχουμε: $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$
με $\left.\begin{array}{l} x_1+x_2 = 2y_1+2y_2 = 2(y_1+y_2) \text{ και} \\ x_1+x_2 = 3z_1+3z_2 = 3(z_1+z_2) \end{array}\right\}$ δηλ. $\vec{v}_1+\vec{v}_2 \in V$

Άρα το V είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.
Επίσης, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ και $\forall\ \vec{v}_1 \in V$ έχουμε:

$\lambda \vec{v}_1 = \lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$

με $\lambda x_1 = \lambda(2y_1) = 2(\lambda y_1)$ και $\lambda x_1 = \lambda(3z_1) = 3(\lambda z_1)$, δηλ. $\lambda \vec{v}_1 \in V$
Άρα το V είναι κλειστό και ως προς το βαθμωτό πολ/σμό
και επομένως, είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

β) κάθε διάνυσμα $\vec{v} = (x,y,z) \in V$ γράφεται ως

$$(x,y,z) = \left(x, \frac{x}{2}, \frac{x}{3}\right) = x\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

Άρα το διάνυσμα $\vec{v}_1 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ παράγει το V και είναι
γρ. ανεξάρτητο (αφού $\lambda \vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0$). Άρα μια βάση
του V είναι το μονοσύνολο $\left\{\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)\right\}$ και επομένως
$\dim V = 1$

γ) Ξέρουμε ότι $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Άρα ψάχνουμε 2 διανύσματα $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$
και $\vec{v}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ τ.ω. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ βάση του $\mathbb{R}^3$. Αρκεί το σύστημα

$\begin{bmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 1/2 & y_2 & y_3 \\ 1/3 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ να έχει μοναδική λύση τη $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$

ή ισοδύναμα $\dim N(A) = 0 \Leftrightarrow n - r(A) = 0 \Leftrightarrow 3 - r(A) = 0 \Leftrightarrow r(A) = 3$

όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 1/2 & y_2 & y_3 \\ 1/3 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$

έχουμε: $\begin{bmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 1/2 & y_2 & y_3 \\ 1/3 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{απαλοιφή}} \begin{bmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 0 & y_2 - \frac{x_2}{2} & y_3 - \frac{x_3}{2} \\ 0 & z_2 - \frac{x_2}{3} & z_3 - \frac{x_3}{3} \end{bmatrix}$

Ικανή συνθήκη (αλλά όχι αναγκαία) για να έχουμε $r(A) = 3$ είναι
$y_2 - \frac{x_2}{2} \neq 0$, $z_3 \neq \frac{x_3}{3}$ και $z_2 = \frac{x_2}{3}$
π.χ. $\vec{v}_2 = \left(1, 0, 1/3\right)$ και $\vec{v}_3 = (1, 0, 2)$

ΑΣΚΗΣΗ 19

Προφανώς $V \subseteq \mathbb{R}^3$ και $V \neq \emptyset$.
Επίσης, $\forall\ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ με $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$
έχουμε: $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$
και $2(x_1+x_2) + (y_1+y_2) + (z_1+z_2) = (2x_1 + y_1 + z_1) + (2x_2 + y_2 + z_2) =$
$= 0 + 0 = 0$. Δηλ. $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V$
Άρα, το V είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.
Επίσης, $\forall\ \vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1) \in V$ και $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε:
$\lambda \vec{v}_1 = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$ με $2(\lambda x_1) + (\lambda y_1) + \lambda z_1 = \lambda(2x_1 + y_1 + z_1) =$
$= \lambda 0 = 0$. Δηλ. $\lambda \vec{v}_1 \in V$
Άρα, το V κλειστό και ως προς βαθμωτό πολ/σμό, και επομένως
διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.
$\forall\ \vec{v} \in V$ έχουμε $2x + y + z = 0 \Leftrightarrow z = -2x - y$
Άρα $\forall\ \vec{v} = (x,y,z) \in V$ έχουμε:

$$\vec{V} = (x, y, z) = (x, y, -2x-y) = x(1, 0, -2) + y(0, 1, -1)$$

με $x, y \in \mathbb{R}$

Άρα $V = \langle (1,0,-2), (0,1,-1) \rangle$ (δηλ. το V παράγεται από τα $\vec{v}_1 = (1,0,-2)$ και $\vec{v}_2 = (0,1,-1)$)

Επίσης: $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άρα $r(A) = 2$ και $\dim N(A) = 2 - 2 = 0$

οπότε μοναδ. λύση $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$ και τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ είναι γρ. ανεξάρτητα, Άρα $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ βάση του V και $\dim V = 2$

Για να βρούμε μια άλλη βάση του V χρησιμοποιούμε το Θεώρημα της Άσκησης 8 παραπάνω. π.χ. μια 2η βάση του V είναι η

$\vec{v}_1 = (1, 0, -2)$ και $\vec{v}_2 = 2(1, 0, -2) + 3(0, 1, -1) = (2, 3, -7)$

και μια άλλη η:

$\vec{v}_1 = (2, 3, -7)$ και $\vec{v}_2 = 1(1, 0, -2) + 1(2, 3, -7) = (3, 3, -9)$