ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Γραμμική Άλγεβρα Ι» (ΕΜ111) – Χειμερινό Εξάμηνο 2006-2007, Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

4

<u>4^{O} ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ</u>

Άσκηση 1: Αν $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ με $ad-cb\neq 0$ δείξτε ότι $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, και βρείτε τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων, εάν υπάρχουν: $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Άσκηση 2: Χρησιμοποιήστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss-Jordan για να βρείτε τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων, εάν υπάρχουν:

$$\text{α)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix},\qquad \text{β)}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},\qquad \text{γ)}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3: Βρείτε τις πραγματικές τιμές x, y έτσι ώστε:

$$\text{α)}\begin{bmatrix} 2x & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix},\qquad \text{β)}\ 2\begin{bmatrix} 2y & y \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 4: Δείξτε ότι εάν ένας πίνακας έχει δύο γραμμές ίδιες, ή δύο στήλες ίδιες, τότε δεν είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 5: Βρείτε τον ανάστροφο των πινάκων:

$$\text{α)}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix},\qquad \text{β)}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\qquad \text{γ)}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}\qquad \text{δ)}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 6: Συμπληρώστε τα * στους ακόλουθους πίνακες, έτσι ώστε να είναι συμμετρικοί:

$$\text{α)}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ * & 7 & * \\ -5 & \sqrt{2} & 3 \end{bmatrix},\qquad \text{β)}\begin{bmatrix} 2 & -1 & * & \pi \\ * & \sqrt{3} & 13 & * \\ -6 & * & -5 & \sqrt{17} \\ * & -11 & * & 7 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 7: Γράψτε καθένα από τους παρακάτω πίνακες ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα

$$\text{α)}\ A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & -5 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix},\qquad \text{β)}\ B=\begin{bmatrix} -2 & 11 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & -1 \\ 8 & 9 & -7 & -2 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 8: Βρείτε πίνακα A τέτοιο ώστε: $(4A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$

Άσκηση 9: Δείξτε ότι εάν A και B είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε:

α) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, β) $(A^T B^T)^{-1} = (A^{-1}B^{-1})^T$

Άσκηση 10: Δίδονται πίνακες $A \in \mathrm{gl}(4\times 1,\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{gl}(2\times 3,\mathbb{R})$, $C \in \mathrm{gl}(2\times 4,\mathbb{R})$ και $D \in \mathrm{gl}(1\times 3,\mathbb{R})$. Ποιοι από τους ακόλουθους πίνακες ορίζονται και τι σχήμα έχουν;

α) ADB^T, β) $C^T B - 5AD$, γ) $4CA - (CA)^2$, δ) $(ADB^T C)^2 - I_4$

Άσκηση 11: α) Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $AB = AC$, δείξτε ότι $B = C$.

β) Εάν $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, βρείτε παράδειγμα ώστε $AB = AC$, αλλά $B \neq C$.

Άσκηση 12: Αν B είναι ο αντίστροφος του A^2, δείξτε ότι ο αντίστροφος του A είναι ο AB (δηλ. αν ο A^2 είναι αντιστρέψιμος, τότε και ο A είναι αντιστρέψιμος).

Άσκηση 13: Βρείτε τους πίνακες $A \in \mathrm{gl}(2\times 2,\mathbb{R})$ με $A \neq I$ και $A \neq -I$, που ταυτίζονται με τους αντίστροφούς τους, δηλ. $A = A^{-1}$.

Άσκηση 14: Δώστε παραδείγματα πινάκων $A, B \in \mathrm{gl}(2\times 2,\mathbb{R})$ έτσι ώστε:
α) Ο $A+B$ είναι μη-αντιστρέψιμος, μολονότι οι A και B είναι αντιστρέψιμοι.
β) Ο $A+B$ είναι αντιστρέψιμος, μολονότι οι A και B είναι μη-αντιστρέψιμοι.
γ) Οι A, B και $A+B$ είναι μη-αντιστρέψιμοι.
δ) Οι A, B και $A+B$ είναι αντιστρέψιμοι.

Άσκηση 15: Αν A, B και $A+B$ είναι αντιστρέψιμοι, χρησιμοποιήστε ότι $A^{-1}(A+B)B^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$ για να δείξτε ότι και ο $B^{-1} + A^{-1}$ είναι αντιστρέψιμος, και βρείτε μια έκφραση για τον $(B^{-1} + A^{-1})^{-1}$.

Άσκηση 16: Αν $A \in \mathrm{gl}(m\times n,\mathbb{R})$, αποδείξτε ότι οι πίνακες AA^T και $A^T A$ είναι συμμετρικοί και δείξτε με παραδείγματα ότι γενικά $AA^T \neq A^T A$, ακόμη και για τετραγωνικούς πίνακες.

Άσκηση 17: Πόσα στοιχεία είναι δυνατόν να οριστούν ανεξάρτητα σε ένα $n\times n$ συμμετρικό πίνακα και πόσα σε έναν $n\times n$ αντισυμμετρικό πίνακα;

Άσκηση 18: Αν $A = LDU$, ποια είναι η αντίστοιχη παραγοντοποίηση του A^T και ποια τριγωνικά συστήματα θα δώσουν τη λύση του $A^T y = b$;

Άσκηση 19: Δείξτε ότι αν A είναι ένας $n\times n$ συμμετρικός πίνακας και $A = LDU$, όπου L είναι $n\times n$ κάτω τριγωνικός πίνακας με 1 στη διαγώνιο του, D είναι $n\times n$ διαγώνιος πίνακας, και U είναι $n\times n$ άνω τριγωνικός πίνακας με 1 στη διαγώνιο του, τότε $L^T = U$.

Άσκηση 20: Πότε ένας άνω τριγωνικός πίνακας είναι μη-ιδιόμορφος;

Άσκηση 21: Δείξτε ότι εάν ο A είναι αντιστρέψιμος, η παραγοντοποίηση $A = LDU$ είναι μοναδική.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (ΕΜ 111)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ 4ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

$$\begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix} \frac{1}{\alpha d - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & \alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha d - bc} \begin{bmatrix} \alpha d - bc & -\alpha b + b\alpha \\ dc - cd & -bc + \alpha d \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\alpha d - bc} \begin{bmatrix} \alpha d - bc & 0 \\ 0 & \alpha d - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Ομοίως: $\frac{1}{\alpha d - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, τότε $\alpha d - bc = 3 \cdot 4 - 8 \cdot 1 = 4 \neq 0$

άρα: $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, τότε $\alpha d - bc = 3 \cdot 4 - 6 \cdot 2 = 0$ και άρα $\nexists\, A^{-1}$

Αν $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, τότε $\alpha d - bc = \cos^2\theta - (-\sin\theta)\sin\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

και επομένως $A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ 2

α) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \xleftarrow{(-)\,1} \\ \xleftarrow{(-)\,2} \end{array} \longrightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \frac{3}{2} \\ (-) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} /1 \\ /2 \\ /3 \end{array} \rightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/2 & 1/3 \end{array}\right]$$

Δηλ. για $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ έχουμε: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/6 & -1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$

β) $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-1/2) \\ (-) \\ \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ 1/3 \\ (-) \end{array} \rightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{ll} & (-) \\ (-) & \\ 3 & 4 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 5/3 & 4/3 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} /2 \\ /3 \\ /1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/6 & 2/3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/3 & 1 \end{array}\right]$$

Άρα για $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ έχουμε: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5/6 & 2/3 & -2 \\ 1/3 & 2/3 & -1 \\ -1/6 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$

γ) $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{ll} 3 & 2 \\ (-) & \\ & (-) \end{array} \longrightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ 1 \\ (-) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

δηλ. $\nexists$ πλήρες σύνολο μη-μηδενικών οδηγών, και άρα ο αρχικός πίνακας είναι μη-αντιστρέψιμος (ή ισοδύναμα ιδιόμορφος)

ΑΣΚΗΣΗ 3

α) Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 2x & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος ανν $4x-7 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \neq \frac{7}{4}$. Σ' αυτήν την περίπτωση: $\begin{bmatrix} 2x & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4x-7}\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 2x \end{bmatrix}$

οπότε: $\begin{bmatrix} \frac{2}{4x-7} & \frac{-7}{4x-7} \\ \frac{-1}{4x-7} & \frac{2x}{4x-7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2(4x-7) \Leftrightarrow x = 2 \\ \text{και} \\ -7 = -7(4x-7) \Leftrightarrow x = 2 \\ \text{και} \\ -1 = -1(4x-7) \Leftrightarrow x = 2 \\ \text{και} \\ 2x = 4(4x-7) \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$$

Άρα: $x = 2$

β) ο πίνακας $\begin{bmatrix} 2y & y \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος, ανν $3(2y)-5y \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y \neq 0$. Σ' αυτήν την περίπτωση: $\begin{bmatrix} 2y & y \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{y}\begin{bmatrix} 3 & -y \\ -5 & 2y \end{bmatrix}$

οπότε: $\frac{2}{y}\begin{bmatrix} 3 & -y \\ -5 & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & -2y \\ -10 & 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y & -2y \\ -5y & 4y \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 3y \Leftrightarrow y = 2 \\ \text{και} \\ -2y = -2y \Leftrightarrow y \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ -10 = -5y \Leftrightarrow y = 2 \\ 4y = 4y \Leftrightarrow y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

, Άρα: $y = 2$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Έστω ο πίνακας $A=[\alpha_{ij}]\in gl(n,\mathbb{R})$ με ίδιες τις γραμμές p και s (με $p\leq n$, $s\leq n$, $p\neq s$). Δηλ. $\alpha_{pk}=\alpha_{sk}$, $\forall\ k=1,\dots,n$

Τότε αν $B=[b_{ij}]\in gl(n,\mathbb{R})$ είναι ένας οποιοσδήποτε $n\times n$ πίνακας θα ισχύει:
$$(AB)_{pj}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{pk}b_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{sk}b_{kj}=(AB)_{sj}\ ,\ \forall\ j=1,\dots,n$$
δηλ. ο πίνακας AB θα έχει επίσης ίδιες τις γραμμές p και s, $\forall\ B\in gl(n,\mathbb{R})$. Όμως, ο μοναδιαίος πίνακας I έχει κάθε γραμμή του διαφορετική από την άλλη και επομένως $AB\neq I$ $\forall\ B\in gl(n,\mathbb{R})$ δηλ. ο A είναι μη-αντιστρέψιμος.

Αντίστοιχα, αν ο πίνακας $\Gamma=[\gamma_{ij}]\in gl(n,\mathbb{R})$ έχει ίδιες τις στήλες p και s (με $p\leq n$, $s\leq n$, $p\neq s$), δηλ. $\gamma_{kp}=\gamma_{ks}$, $\forall\ k=1,\dots,n$, τότε:
$$(B\Gamma)_{ip}=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}\gamma_{kp}=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}\gamma_{ks}=(B\Gamma)_{is}\ ,\ \forall\ i=1,\dots,n$$
δηλ. ο πίνακας $B\Gamma$ θα έχει επίσης ίδιες τις στήλες p και s, $\forall\ B\in gl(n,\mathbb{R})$. Όμως, ο I έχει κάθε στήλη διαφορετική από την άλλη, οπότε $B\Gamma\neq I$ $\forall\ B\in gl(n,\mathbb{R})$ και ο Γ δεν είναι αντιστρέψιμος.

ΑΣΚΗΣΗ 5

α) $\begin{bmatrix}1&2&0&5\\2&3&3&1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\\0&3\\5&1\end{bmatrix}$

β) $\begin{bmatrix}2&4\\-1&1\\0&2\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}2&-1&0\\4&1&2\end{bmatrix}$

γ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ δ) $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ 6

α) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 7 & \sqrt{2} \\ -5 & \sqrt{2} & 3 \end{bmatrix}$ β) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -6 & \pi \\ -1 & \sqrt{3} & 13 & -11 \\ -6 & 13 & -5 & \sqrt{17} \\ \pi & -11 & \sqrt{17} & 7 \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ 7

α) $A = S_A + W_A$ με S_A συμμετρικό και W_A αντισυμμετρικό πίνακα

$$S_A = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & -5 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -7 & 6 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & -14 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & -7 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$W_A = \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 5 & 0 & -11 \\ -3 & 11 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5/2 & 3/2 \\ 5/2 & 0 & -11/2 \\ -3/2 & 11/2 & 0 \end{bmatrix}$$

β) $B = S_B + W_B$ όπου S_B συμμετρικός και W_B αντισυμμετρικός πίνακας

$$S_B = \frac{1}{2}(B + B^T) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -2 & 11 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & -1 \\ 8 & 9 & -7 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 & 8 \\ 11 & -3 & 2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 15 & 4 & 10 \\ 15 & -6 & 2 & 10 \\ 4 & 2 & 12 & -8 \\ 10 & 10 & -8 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 15/2 & 2 & 5 \\ 15/2 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & -4 \\ 5 & 5 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$W_B = \frac{1}{2}(B - B^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 & -6 \\ -7 & 0 & -2 & -8 \\ -2 & 2 & 0 & 6 \\ 6 & 8 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

$$(4A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 4A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4A^T = \frac{1}{2(-4)-3(-4)}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 4A^T = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^T = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 \\ -\frac{3}{16} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $A^T(A^{-1})^T = I = (A^{-1})^T A^T$. Έχουμε:

$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I$ και $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I$

Άρα $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $(A^TB^T)(A^{-1}B^{-1})^T = I = (A^{-1}B^{-1})^T A^T B^T$

Έχουμε: $(A^TB^T)(A^{-1}B^{-1})^T = (A^TB^T)(B^{-1})^T(A^{-1})^T = A^TB^T(B^T)^{-1}(A^{-1})^T =$

$= A^T I (A^{-1})^T = A^T(A^{-1})^T = A^T(A^T)^{-1} = I$

και

$(A^{-1}B^{-1})^T A^T B^T = (BA(A^{-1}B^{-1}))^T = (B(AA^{-1})B^{-1})^T = (BB^{-1})^T = I$

ΑΣΚΗΣΗ 10

α) $\underset{(4\times1)}{A}\underset{(1\times3)}{D}\underset{(3\times2)}{B^T}$ ορίζεται και είναι σχήματος 4×2

β) $\underset{(4\times2)}{C^T}\underset{(2\times3)}{B} - 5\underset{(4\times1)}{A}\underset{(1\times3)}{D}$ ορίζεται και είναι σχήματος 4×3

γ) $4CA-(CA)^2 = 4\underset{(2\times4)(4\times1)}{CA} - \underbrace{(CA)}_{(2\times1)}\underbrace{(CA)}_{(2\times1)}$ δεν ορίζεται γιατί δεν ορίζεται το $(CA)^2$ μολονότι ορίζεται το CA

δ) $\underset{(4\times1)}{A}\underset{(1\times3)}{D}\underset{(3\times2)}{B^T}\underset{(2\times4)}{C}$ είναι 4×4, άρα και το $(ADB^TC)^2 - I_4$ ορίζεται και είναι 4×4.

ΑΣΚΗΣΗ 11

α) $B = IB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) = (A^{-1}A)C = IC = C$

β) Ο A είναι μη-αντιστρέψιμος, αφού $\alpha d - bc = 1\cdot0 - 0\cdot0 = 0$.

Έστω $B=[b_{ij}]$ και $C=[c_{ij}]$ πίνακες 2×2. Τότε:

$$AB=AC \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ 0 & 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b_{11} = c_{11} \\ \text{και} \\ b_{12} = c_{12}\end{cases}$$

δηλ. αρκεί οι B και C να έχουν ίδια την 1η γραμμή τους, αλλά όχι και τη 2η. Για παράδειγμα:

$$B=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 5 & 1\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 7 & 4\end{bmatrix}$$

Σημείωση: στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγαμε αν θεωρούσαμε τους B, C μη-τετραγωνικούς πίνακες $2\times m$.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Αρκεί να δείξουμε ότι $A(AB)=I=(AB)A$. Έχουμε:

$$A(AB)=(AA)B=A^2B=A^2(A^2)^{-1}=I \quad , \quad \text{και:}$$

$$(AB)A=A(A^2)^{-1}A=A(A^2)^{-1}AI=A(A^2)^{-1}AA(AB)=$$

$$=A(A^2)^{-1}(A^2)(AB)=AI(AB)=A(AB)=I$$

ΑΣΚΗΣΗ 13

$$\left.\begin{matrix}A=A^{-1}\\ AA^{-1}=I\end{matrix}\right\}\Rightarrow A^2=I \qquad \text{Έστω } A=\begin{bmatrix}\alpha & b\\ c & d\end{bmatrix} \text{ με } \alpha,b,c,d\in\mathbb{R}$$

Τότε $A^2=I \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\alpha^2+bc & (\alpha+d)b\\ (\alpha+d)c & d^2+bc\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(\alpha+d)b=0 \Leftrightarrow \{b=0 \text{ ή } d=-\alpha\}\\ (\alpha+d)c=0 \Leftrightarrow \{c=0 \text{ ή } d=-\alpha\}\\ \alpha^2+bc=1\\ d^2+bc=1\end{cases}$$

Αν $d=-\alpha$, τότε η 3η και η 4η εξίσωση είναι ίδιες, οπότε έχουμε:

$$\left.\begin{matrix}d=-\alpha\\ \alpha^2+bc=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}d=-\alpha\\ \alpha=\pm\sqrt{1-bc}\end{cases}, \text{ για } bc\leq 1$$

Επομένως: $A=\begin{bmatrix}\sqrt{1-bc} & b\\ c & -\sqrt{1-bc}\end{bmatrix}$ ή $A=\begin{bmatrix}-\sqrt{1-bc} & b\\ c & \sqrt{1-bc}\end{bmatrix}$ $\forall\, b,c\in\mathbb{R}$ με $bc\leq 1$

Αν $b=0$ ή $c=0$, τότε $\alpha^2=d^2=1$ οι οποίες για $A\neq \pm I$ δίνουν:
$d=-\alpha=\pm 1$, που επίσης ανήκει στην παραπάνω περίπτωση.

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 14}}$

α) Έστω $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ ο οποίος είναι αντιστρέψιμος, αφού

$4\cdot 1-3\cdot 2=-2\neq 0$, και έστω $B=\begin{bmatrix}x & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ όπου επίσης

είναι αντιστρέψιμος $\forall\, x\in\mathbb{R}$. Τότε:

$A+B=\begin{bmatrix}1+x & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, ο οποίος είναι μη-αντιστρέψιμος ανν

$4(1+x)-6=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Άρα: $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1/2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ αντιστρέψιμοι, ενώ

$A+B=\begin{bmatrix}3/2 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ μη-αντιστρέψιμος.

β) Έστω $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}x & -1\\ 2x & -2\end{bmatrix}$ οι οποίοι είναι

μη-αντιστρέψιμοι αφού για τον A: $\alpha d-bc=1\cdot 6-3\cdot 2=0$ και
για τον B: $\alpha d-bc=-2x-(-1)2x=0$ $\forall\, x\in\mathbb{R}$. Τότε $A+B=$

$=\begin{bmatrix}1+x & 1\\ 3+2x & 4\end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος ανν $4(1+x)-(3+2x)1\neq 0$

$\Leftrightarrow x\neq -\frac{1}{2}$ π.χ. $x=1$

Άρα: $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{bmatrix}$ μη-αντιστρέψιμοι, ενώ

$A+B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 4\end{bmatrix}$ αντιστρέψιμος

γ) Αν επιλέξουμε πάλι $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}x & -1\\ 2x & -2\end{bmatrix}$

τότε από το ερώτημα (β) έχουμε ότι για $x=-1/2$ και

οι τρεις πίνακες $A, B, A+B$ είναι μη-αντιστρέψιμοι

δηλ. $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1/2 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$, $A+B=\begin{bmatrix}1/2 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

δ) Αν επιλέξουμε $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}x & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ όπως στο

ερώτημα (α), με $x\neq\frac{1}{2}$, τότε $A, B, A+B$ είναι αντιστρέψιμοι.

π.χ. για $x=1$, έχουμε:

$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$, $A+B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ 15

Απόδειξη ότι $A^{-1}(A+B)B^{-1}=B^{-1}+A^{-1}$:

$$A^{-1}(A+B)B^{-1}=(A^{-1}A+A^{-1}B)B^{-1}=(A^{-1}A)B^{-1}+A^{-1}BB^{-1}=$$

$$=IB^{-1}+A^{-1}I=B^{-1}+A^{-1}$$

Εφόσον, $B^{-1}+A^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}$ δηλ. γινόμενο των αντιστρέψιμων πινάκων A^{-1}, $A+B$ και B^{-1}, συνεπάγεται ότι και

$B^{-1}+A^{-1}$ είναι αντιστρέψιμος με

$$(B^{-1}+A^{-1})^{-1} = \left(A^{-1}(A+B)B^{-1}\right)^{-1} = (B^{-1})^{-1}(A+B)^{-1}(A^{-1})^{-1} =$$

$$= B\,(A+B)^{-1}A$$

ΑΣΚΗΣΗ 16

$$(AA^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}(A^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}(A)_{jk} = \sum_{k=1}^{n}(A)_{jk}(A)_{ik} = \sum_{k=1}^{n}(A)_{jk}(A^T)_{ki} =$$

$$= (AA^T)_{ji} \quad \forall\ i=1,\dots,m \text{ και } j=1,\dots,m$$

Άρα, ο AA^T είναι συμμετρικός $m\times m$ πίνακας.①

$$(A^TA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m}(A^T)_{ik}(A)_{kj} = \sum_{k=1}^{m}(A)_{ki}(A)_{kj} = \sum_{k=1}^{m}(A)_{kj}(A)_{ki} = \sum_{k=1}^{m}(A^T)_{jk}(A)_{ki} =$$

$$= (A^TA)_{ji} \quad \forall\ i=1,\dots,n \text{ και } j=1,\dots,n$$

Άρα, ο A^TA είναι συμμετρικός $n\times n$ πίνακας.②

Για μη-τετραγωνικούς πίνακες ($m\neq n$) είναι προφανές ότι ο $m\times m$ πίνακας AA^T δεν μπορεί να είναι ίσος με τον $n\times n$ πίνακα A^TA.

Από την άλλη έστω ο 3×3 τετραγωνικός πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{τότε} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 8 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 74 & 57 & -7 \\ 57 & 66 & -2 \\ -7 & -2 & 5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 18 & 36 & -1 \\ 36 & 113 & -17 \\ -1 & -17 & 14 \end{bmatrix} = A^TA$$

---

① πιο σύντομη απόδειξη: $(AA^T)^T = (A^T)^TA^T = AA^T$

② πιο σύντομη απόδειξη: $(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$

ΑΣΚΗΣΗ 17

Γενικά σε ένα $n \times n$ πίνακα έχουμε n^2 στοιχεία, τα οποία αποτελούνται από:

1) n στοιχεία στην κύρια διαγώνιο, και
2) ισάριθμα πλήθη στοιχείων πάνω και κάτω από τη διαγώνιο.

Άρα: $\begin{cases} n \text{ στοιχεία στη διαγώνιο} \\ \frac{n^2-n}{2} \text{ στοιχεία κάτω από τη διαγώνιο} \\ \frac{n^2-n}{2} \text{ στοιχεία πάνω από τη διαγώνιο} \end{cases}$

Επειδή σε ένα συμμετρικό πίνακα A, έχουμε $(A)_{ij} = (A)_{ji}$, αρκεί να οριστούν τα στοιχεία της διαγωνίου και τα στοιχεία μόνο πάνω ή μόνο κάτω από τη διαγώνιο. Άρα, είναι δυνατόν να οριστούν ανεξάρτητα $n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ στοιχεία.

Αντίστοιχα, σε ένα αντισυμμετρικό πίνακα B, έχουμε $(B)_{ij} = -(B)_{ji}$, οπότε τα διαγώνια στοιχεία είναι μηδέν και άρα αρκεί να οριστούν τα στοιχεία μόνο πάνω ή μόνο κάτω από τη διαγώνιο. Άρα, είναι δυνατόν να οριστούν ανεξάρτητα $\frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ στοιχεία.

ΑΣΚΗΣΗ 18

$$A = LDU \iff A^T = (LDU)^T \iff A^T = U^T D^T L^T \iff$$

$$\iff A^T = \underbrace{U^T}_{\text{κάτω τριγων. με 1 στη διαγώνιο}} D \underbrace{L^T}_{\text{άνω τριγων. με ένα στη διαγώνιο}}$$

δηλ. $A^T = L_1 D_1 U_1$ με $L_1 = U^T$, $D_1 = D$, $U_1 = L^T$

$$A^T y = b \iff \begin{cases} L_1 c = b \\ D_1 U_1 y = c \end{cases} \qquad \begin{cases} U^T c = b & \text{κάτω τριγωνικό σύστημα} \\ D L^T y = c & \text{άνω τριγωνικό σύστημα} \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 19

$$\left.\begin{array}{l} A = LDU \\ A = A^T \end{array}\right\} \quad LDU = (LDU)^T = U^T D^T L^T = U^T D L^T$$

, η οποία λόγω της μοναδικότητας της παραγοντοποίησης $A = LDU$ δίνει:

$L = U^T$ και $V = L^T$

ΑΣΚΗΣΗ 20

Έστω: $U = \begin{bmatrix} d_1 & * & \cdots & * \\ 0 & d_2 & \cdots & * \\ 0 & 0 & d_3 \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$ Πίνακας $n \times n$

$\{U$ μη-ιδιόμορφος$\}$ ανν $\{d_1 \neq 0, d_2 \neq 0, \ldots, d_n \neq 0\}$

ΑΣΚΗΣΗ 21

Έστω ότι υπάρχουν δύο παραγοντοποιήσεις $A = L_1 D_1 U_1 = L_2 D_2 U_2$

Άρα $L_1 D_1 U_1 = L_2 D_2 U_2 \Leftrightarrow L_1^{-1} L_1 D_1 U_1 = L_1^{-1} L_2 D_2 U_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow D_1 U_1 = L_1^{-1} L_2 D_2 U_2 \Leftrightarrow D_1 U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2 D_2 U_2 U_2^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow D_1 U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2 D_2 \qquad (1)$

Επειδή, ο αντίστροφος ενός άνω (κάτω) τριγωνικού πίνακα είναι πάλι άνω (κάτω) τριγωνικός πίνακας, και επειδή ο πολλ/σμός δύο άνω (κάτω) τριγωνικών πινάκων δίνει πάλι άνω (κάτω) τριγωνικό πίνακα με στοιχεία στη διαγώνιο ίσα με το γινόμενο των αντίστοιχων στοιχείων των δύο πινάκων, συνεπάγεται ότι ο $D_1 U_1 U_2^{-1}$ είναι άνω τριγωνικός με κύρια διαγώνιο ίδια με τον D_1 (αφού U_1 και U_2^{-1} έχουν μονάδες στη διαγώνιο), ενώ ο $L_1^{-1} L_2 D_2$ είναι κάτω τριγωνικός με κύρια διαγώνιο ίδια με τον D_2 (αφού L_1 και L_2^{-1} έχουν μονάδες στη διαγώνιο). Όμως, εφόσον ο άνω τριγωνικός $D_1 U_1 U_2^{-1}$ είναι ίσος με τον κάτω τριγωνικό $L_1^{-1}L_2D_2$ συμπεραίνεται ότι και οι δύο πίνακες είναι διαγώνιοι και ότι $D_1U_1U_2^{-1} = D_1$ και $L_1^{-1}L_2D_2 = D_2$ οπότε:

$D_1 = D_2$.

Επίσης ο D_1 είναι αντιστρέψιμος (αφού ο A είναι αντιστρέψιμος), άρα:

$$D_1U_1U_2^{-1} = D_1 \Leftrightarrow U_1U_2^{-1} = I \Leftrightarrow U_2^{-1} = U_1^{-1} \Leftrightarrow U_2 = U_1$$, και

$$L_1^{-1}L_2D_2 = D_2 \Leftrightarrow L_1^{-1}L_2 = I \Leftrightarrow L_2 = L_1$$

Άρα η παραγοντοποίηση $A = LDU$ είναι μοναδική.