ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Γραμμική Άλγεβρα Ι» (ΕΜ111) – Χειμερινό Εξάμηνο 2006-2007, Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

3^Ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Πόσοι μεμονωμένοι πολλαπλασιασμοί χρειάζονται όταν ένας $m \times n$ πίνακας A πολλαπλασιάζεται: α) με ένα n-διάστατο διάνυσμα x; β) με ένα $n \times p$ πίνακα B;

Άσκηση 2: Δώστε παραδείγματα 4×4 και υπολογίστε το ίχνος κάθε πίνακα για τις περιπτώσεις:
α) διαγώνιου πίνακα, β) άνω τριγωνικού πίνακα, γ) κάτω τριγωνικού πίνακα, δ) στοιχειώδους πίνακα.

Άσκηση 3: Εξετάστε αν καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής, και δώστε ένα αντιπαράδειγμα στις ψευδείς περιπτώσεις.
α) Αν η $1^η$ και η $3^η$ στήλη του B είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την $1^η$ και $3^η$ στήλη του AB.
β) Αν η $1^η$ και η $3^η$ γραμμή του B είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την $1^η$ και $3^η$ γραμμή του AB.
γ) Αν η $1^η$ και η $3^η$ γραμμή του A είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την $1^η$ και $3^η$ γραμμή του AB.
δ) $(AB)^2 = A^2B^2$.

Άσκηση 4: Το γινόμενο δύο κάτω τριγωνικών πινάκων είναι πάλι κάτω τριγωνικός. Δώστε ένα παράδειγμα 3×3 και εξηγήστε πως αυτό έπεται από τους νόμους του πολλαπλασιασμού πινάκων.

Άσκηση 5: Βρείτε παραδείγματα πραγματικών πινάκων 2×2, τέτοιων ώστε: α) $A^2 = -I$, β) $B^2 = 0$, με $B \neq 0$, γ) $CD = -DC$, με $CD \neq 0$, δ) $EF = 0$, χωρίς κανένα στοιχείο των E & F να είναι 0.

Άσκηση 6: Αν για κάθε πίνακα $B \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$, ισχύει $AB = BA$ με $A \neq 0$, τότε ο A είναι πολλαπλάσιος του ταυτοτικού (μοναδιαίου) πίνακα. Αποδείξτε αυτήν την πρόταση για την περίπτωση που $n = 2$.

Άσκηση 7: Ποιοι από τους επόμενους πίνακες είναι ίσοι με $(A+B)^2$, για κάθε $A, B \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$;
α) $(B+A)^2$, β) $(A+B)(B+A)$, γ) $A(A+B)+B(A+B)$, δ) $A^2 + AB + BA + B^2$, ε) $A^2 + 2AB + B^2$

Άσκηση 8: Εφαρμόστε απαλοιφή για να βρείτε τους παράγοντες L και U των πινάκων:

$$\text{α)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \text{β)} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \text{γ)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 9: Λύστε την εξίσωση $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, αναλύοντας την σε δύο τριγωνικές εξισώσεις, $Lc = b$ και $Ux = c$.

Άσκηση 10: Βρείτε τους E^2 , E^9 και E^{-1}, όταν $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 11: Πώς θα μπορούσατε να παραγοντοποιήσετε τον πίνακα A σε ένα γινόμενο UL, δηλ. άνω τριγωνικού επί κάτω τριγωνικό; Θα είχε τους ίδιους παράγοντες με τον $A = LU$;

Άσκηση 12: Λύστε τα ακόλουθα συστήματα με απαλοιφή, κάνοντας εν ανάγκη εναλλαγή γραμμών:

$$\text{α)}\ \begin{cases} u+4v+2w=-2 \\ -2u-8v+3w=32 \\ v+w=1 \end{cases}, \qquad \text{β)}\ \begin{cases} v+w=0 \\ u+v=0 \\ u+v+w=1 \end{cases}$$

Ποιοι πίνακες μεταθέσεων απαιτούνται;

Άσκηση 13: Βρείτε τις παραγοντοποιήσεις $PA = LDU$ και επαληθεύστε τις, για

$$\text{α)}\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \text{β)}\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 14: Ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών *a*, *b*, *c* οδηγούν σε εναλλαγές γραμμών και ποιες κάνουν τους ακόλουθους πίνακες ιδιόμορφους;

$$\text{α)}\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 8 & 3 \\ 0 & b & 5 \end{bmatrix}, \qquad \text{β)}\ \begin{bmatrix} c & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ (ΕΜ 111)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ 3ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

α) Έστω $A=[\alpha_{ij}]$, τότε $(AX)_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j$, με $i=1,2,\dots m$

δηλ. για κάθε στοιχείο απαιτούνται n πολλ/σμοί, οπότε για τα m στοιχεία του Ax θα έχουμε mn πολλ/σμούς

β) Έστω $A=[\alpha_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$. Τότε: $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} b_{kj}$

με $i=1,2,\dots m$ και $j=1,2,\dots,p$

δηλ. για κάθε στοιχείο απαιτούνται n πολλ/σμοί, οπότε για τα mp στοιχεία του AB θα έχουμε mpn πολλ/σμούς.

ΑΣΚΗΣΗ 2

α) Διαγώνιος πίνακας: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$tr(A) = 2-3+1+5 = 5$

β) Άνω τριγωνικός πίνακας:

$B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, με $tr(B) = 4+6-2+1 = 9$

γ) Κάτω τριγωνικός πίνακας:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 0 \\ 2 & 9 & -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad \text{με } tr(\Gamma) = 7+3+6-4 = 12$$

δ) Στοιχειώδης πίνακας:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{με } tr(E) = 1+1+1+1 = 4$$

(όπως και $\forall$ στοιχειώδη πίνακα 4x4)

ΑΣΚΗΣΗ 3

Έστω $A = [\alpha_{ij}] \in gl(m \times n, \mathbb{R})$ και $B = [b_{ij}] \in gl(n \times p, \mathbb{R})$

α) Ισχύει $b_{k1} = b_{k3}$, $\forall\ k = 1, 2, \ldots, n$

Άρα: $(AB)_{i1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} b_{k1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} b_{k3} = (AB)_{i3}$, $\forall\ i = 1, 2, \ldots, m$

Επομένως, η πρόταση είναι αληθής.

β) Ισχύει $b_{1j} = b_{3j}$, $\forall\ j = 1, 2, \ldots, p$

$$\left.\begin{aligned} \text{Άρα: } (AB)_{1j} &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{1k} b_{kj} \\ \text{και: } (AB)_{3j} &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{3k} b_{kj} \end{aligned}\right\} \quad (AB)_{1j} - (AB)_{3j} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{1k} - \alpha_{3k}) b_{kj} \neq 0$$

(γενικά)

δηλ. η πρόταση είναι ψευδής.

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 6 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 30 & -10 \\ 19 & -23 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$

γ) Ισχύει: $\alpha_{1k} = \alpha_{3k}$, $\forall\ k = 1, 2, \ldots, n$

Άρα: $(AB)_{1j} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{1k} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{3k} b_{kj} = (AB)_{3k}$

Επομένως, η πρόταση είναι αληθής.

δ) $(AB)^2 - A^2B^2 = (AB)(AB) - (AA)(BB) = A(BA)B - A(AB)B =$

$= A\left[(BA)B - (AB)B\right] = A\left(BA - AB\right)B \neq 0$ γενικά

Π.χ. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 14 & -6 \end{bmatrix}$, $(AB)^2 = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 14 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 14 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 120 \end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B^2 = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ -20 & 36 \end{bmatrix}$, $A^2B^2 = \begin{bmatrix} 92 & 36 \\ -32 & 144 \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Έστω: $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

Τότε: $AB = \begin{bmatrix} \alpha_{11} b_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} b_{11} + \alpha_{22} b_{21} & \alpha_{22} b_{22} & 0 \\ \alpha_{31} b_{11} + \alpha_{32} b_{21} + \alpha_{33} b_{31} & \alpha_{32} b_{22} + \alpha_{33} b_{32} & \alpha_{33} b_{33} \end{bmatrix}$

Γενικά, αν $A = [\alpha_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in gl(n, \mathbb{R})$ με

$\alpha_{ij} = 0$, $b_{ij} = 0$ για $i < j$

Έτσι, $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} b_{kj}$, με $\alpha_{ik} b_{kj} = 0$ αν $\{k > i$ ή $k < j\}$

δηλ. οι μη-μηδενικοί όροι $\alpha_{ik} b_{kj} \neq 0$ (γενικά) αν $\{k \leq i$ και $k \geq j\}$

$\Leftrightarrow \{ j \leq k \leq i \}$, οπότε για $j \leq i$. Άρα:

$$(AB)_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=j}^{i} \alpha_{ik} b_{kj} & , \text{ όταν } j \leq i \\ 0 & , \text{ όταν } j > i \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

α) Έστω $A = \begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix}$, τότε $A^2 = -I \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha^2 + bc & (\alpha + d) b \\ (\alpha + d) c & d^2 + bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha + d) b = 0 \Leftrightarrow \{ b = 0 \text{ ή } d = -\alpha \} \\ (\alpha + d) c = 0 \Leftrightarrow \{ c = 0 \text{ ή } d = -\alpha \} \\ \alpha^2 + bc = -1 \\ d^2 + bc = -1 \end{cases}$$

οι τιμές $b = 0$ και $c = 0$ απορρίπτονται γιατί οδηγούν σε $\alpha^2 = d^2 = -1$ που δεν έχει πραγματικές ρίζες. Άρα, $\{ d = -\alpha$ και $\alpha^2 + bc = -1 \} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{ d = -\alpha \text{ και } c = -\frac{(1+\alpha^2)}{b} \right\}$ με $b \neq 0$

δηλ. $A = \begin{bmatrix} \alpha & b \\ -\frac{(1+\alpha^2)}{b} & -\alpha \end{bmatrix}$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$

π.χ. για $\alpha = b = 1$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

β) Έστω $B=\begin{bmatrix}\alpha & b\\ c & d\end{bmatrix}$ με $\alpha,b,c,d\in\mathbb{R}$. Τότε $B^2=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\alpha^2+bc & (\alpha+d)b\\ (\alpha+d)c & d^2+bc\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(\alpha+d)b=0 \Leftrightarrow \{b=0 \text{ ή } d=-\alpha\}\\ (\alpha+d)c=0 \Leftrightarrow \{c=0 \text{ ή } d=-\alpha\}\\ \alpha^2+bc=d^2+bc=0\end{cases}$$

Αν $b=c=0$ τότε $\alpha=d=0$, δηλ. $B=0$ η οποία απορρίπτεται

Αν $\{d=-\alpha$ και $[b\neq 0$ ή $c\neq 0]\}$, τότε $\alpha^2+bc=0 \Leftrightarrow \alpha=\pm\sqrt{bc}$ με $bc\geq 0$.

Επομένως, $B=\begin{bmatrix}\pm\sqrt{bc} & b\\ c & \mp\sqrt{bc}\end{bmatrix}$, $\forall\,(b,c)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ με $bc\geq 0$

π.χ. $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix}$

γ) Έστω $C=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}u & v\\ w & z\end{bmatrix}$ με $u,v,w,z\in\mathbb{R}$ και $C_{ij}\in\mathbb{R}$ για $i=1,2$, $j=1,2$

$$CD=-DC \Leftrightarrow CD+DC=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}2C_{11}u+C_{12}w+C_{21}v & (C_{11}+C_{22})v+C_{12}u+C_{12}z\\ C_{21}u+(C_{22}+C_{11})w+C_{21}z & 2C_{22}z+C_{21}v+C_{12}w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}2C_{11} & C_{21} & C_{12} & 0\\ C_{12} & C_{11}+C_{22} & 0 & C_{12}\\ C_{21} & 0 & C_{11}+C_{22} & C_{21}\\ 0 & C_{21} & C_{12} & 2C_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \qquad (1)$$

με προφανή λύση $(u, v, w, z) = (0, 0, 0, 0)$, δηλ. $D = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow CD = 0$, οπότε απορρίπτεται.

Το σύστημα (1) έχει μη-μηδενικές (άπειρες) λύσεις (όπως μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας απαλοιφή Gauss, ή όπως θα δούμε σε επόμενα μαθήματα, υπολογίζοντας την ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών) αν και μόνο αν $4(c_{11}+c_{22})^2(c_{11}c_{22}-c_{21}c_{12}) = 0$ (2)

Δηλ. $\forall\ C \in gl(2, \mathbb{R})$ με την ιδιότητα (2) μπορεί να βρεθεί $D \in gl(2, \mathbb{R})$, με $D \neq 0$ τ.ω. $CD = -DC$.

Έστω $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, τότε η (1) δίνει:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Απαλοιφή Gauss: $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ εναλλαγή $\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 2 $\sim$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 1 $\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

δηλ. $\left\{\begin{aligned} u + z &= 0 \\ 2v + w &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} z &= -u \\ w &= -2v \end{aligned}\right.$

Επομένως, $D = \begin{bmatrix} u & v \\ -2v & -u \end{bmatrix}$, $\forall\ (u, v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Επίσης, θα πρέπει $CD \neq 0 \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v \\ -2v & -u \end{bmatrix} \neq 0 \iff$

$\iff \begin{bmatrix} -2v & -u \\ 2u & 2v \end{bmatrix} \neq 0$ δηλ. $u \neq 0$ ή $v \neq 0$

π.χ. $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

δ) Έστω: $E = \begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix}$ και $F = \begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}$

$EF = 0 \iff \begin{bmatrix} \alpha u + bw & \alpha v + bz \\ cu + dw & cv + dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \iff$

$\iff \begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Εκτός από την προφανή λύση $(u, v, w, z) = (0, 0, 0, 0)$, η οποία δεν γίνεται δεκτή από την εκφώνηση, κάθε σύστημα έχει μη-μηδενικές (άπειρες λύσεις) αν και μόνο αν $\alpha d - cb = 0$. Απόδειξη:

$\begin{bmatrix} \alpha & b & 0 \\ c & d & 0 \end{bmatrix} \xleftarrow{\frac{c}{\alpha}} \underset{(\text{εφόσον } \alpha \neq 0)}{\sim} \begin{bmatrix} \alpha & b & 0 \\ 0 & d - \frac{c}{\alpha} b & 0 \end{bmatrix}$ που έχει άπειρες λύσεις

αν και μόνο αν $d - \frac{c}{\alpha} b = 0 \underset{\alpha \neq 0}{\iff} \alpha d - cb = 0$

Αν $\alpha = 0$ τότε: $\begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ c & d & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{εναλλαγή}} \sim \begin{bmatrix} c & d & 0 \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix}$ που έχει

άπειρες λύσεις αν και μόνο αν $b = 0$ οπότε και πάλι $\alpha d - cb = 0$.

π.χ. $E = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Σ' αυτήν την περίπτωση: $\left\{\begin{array}{l} 2u+w=0 \\ 2v+z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} w=-2u \\ z=-2v \end{array}\right.$

Άρα: $F=\begin{bmatrix} u & v \\ -2u & -2v \end{bmatrix}$, $u,v \in \mathbb{R}^*$ π.χ. $F=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Έστω $A=[\alpha_{ij}]$, $B=[b_{ij}] \in gl(2,\mathbb{R})$

Τότε: $AB=BA \Leftrightarrow AB-BA=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (AB)_{ij}-(BA)_{ij}=0 \quad \forall \left\{\begin{array}{l} i=1,2 \\ j=1,2 \end{array}\right.$

δηλ. $\sum_{k=1}^{2}(\alpha_{ik}b_{kj}-b_{ik}\alpha_{kj})=0$ για $i=1,2$, $j=1,2$

ή αναλυτικά

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \alpha_{12}b_{21}-\alpha_{21}b_{12}=0 \\ \alpha_{21}b_{12}-\alpha_{12}b_{21}=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \{\alpha_{12}b_{21}=\alpha_{21}b_{12} \ \forall\ b_{21},b_{12}\in\mathbb{R}\} \Leftrightarrow \{\alpha_{12}=\alpha_{21}=0\} \\ \alpha_{11}b_{12}+\alpha_{12}b_{22}-b_{11}\alpha_{12}+b_{12}\alpha_{22}=0 \\ \alpha_{21}b_{11}+\alpha_{22}b_{21}-b_{21}\alpha_{11}-b_{22}\alpha_{21}=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_{12}=\alpha_{21}=0 \\ \left.\begin{array}{l} \alpha_{11}b_{12}-b_{12}\alpha_{22}=0 \\ \alpha_{22}b_{21}-b_{21}\alpha_{11}=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} (\alpha_{11}-\alpha_{22})b_{12}=0 & \forall\ b_{12}\in\mathbb{R} \\ (\alpha_{22}-\alpha_{11})b_{21}=0 & \forall\ b_{21}\in\mathbb{R} \end{array}\right. \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_{12}=\alpha_{21}=0 \\ \alpha_{22}=\alpha_{11} \end{array}\right.$$ δηλ. $A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & \alpha_{11} \end{bmatrix}=\alpha_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\alpha_{11}I$

ΑΣΚΗΣΗ 7

α) $B+A=A+B \Rightarrow (B+A)^2=(A+B)^2$

β) $(A+B)(B+A)=(A+B)(A+B)=(A+B)^2$

γ) $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A(A+B)+B(A+B)$

δ) $(A+B)^2=A(A+B)+B(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$

ε) $(A+B)^2-(A^2+2AB+B^2)=(A^2+AB+BA+B^2)-$

$-(A^2+2AB+B^2)=BA-AB\neq 0$ γενικά

Άρα: $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$

ΑΣΚΗΣΗ 8

α) $$\begin{array}{c} 4 \\ (-) \end{array}\begin{bmatrix}2&1\\8&7\end{bmatrix} \Bigg| \begin{bmatrix}1&0\\ *&1\end{bmatrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}}_{U} \Bigg| \underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\4&1\end{bmatrix}}_{L}$$

Άρα: $\begin{bmatrix}2&1\\8&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}$

β) $$\begin{array}{c} (\tfrac{1}{3})\,(\tfrac{1}{3}) \\ (-) \\ (-) \end{array}\begin{bmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{bmatrix} \Bigg| \begin{bmatrix}1&0&0\\ *&1&0\\ *&*&1\end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ (\tfrac{1}{4}) \\ (-) \end{array}\begin{bmatrix}3&1&1\\0&8/3&2/3\\0&2/3&8/3\end{bmatrix} \Bigg| \begin{bmatrix}1&0&0\\ 1/3&1&0\\ 1/3&*&1\end{bmatrix}$$

$$\sim \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 8/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix}}_{U} \Bigg| \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}}_{L}$$

Άρα:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 8/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix}$$

γ)

$$\begin{array}{c} (1)\ (1) \\ (-) \\ (-) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ (1) \\ (-) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & * & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{U} \Bigg| \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{L}$$

Άρα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b}$$

$$Lc=b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1η εξίσωση: $c_1=2$

2η εξίσωση $c_1+c_2=0 \Rightarrow c_2=-c_1 \Rightarrow c_2=-2$

3η εξίσωση $c_1+c_3=2 \Rightarrow c_3=2-c_1 \Rightarrow c_3=0$

$$Ux=c \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3η εξίσωση: $w=0$

2η εξίσωση: $v+2w=-2 \Rightarrow v=-2$

1η εξίσωση: $2u+4v+4w=2 \Rightarrow u=5$

δηλ. μοναδική λύση $(u,v,w)=(5,-2,0)$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 10}}$

Ο E είναι ένας στοιχειώδης πίνακας. Γενικά, ν στοιχειώδη πίνακα $E\in gl(n,\mathbb{R})$ με $-\lambda\neq 0$ στη θέση ij (με $i\neq j$), ο πίνακας E^m για $m\in\mathbb{Z}$ είναι επίσης στοιχειώδης με την τιμή $-m\lambda$ στην ίδια θέση ij. Εδώ $-\lambda=6$, ως εκ τούτου

$$E^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E^9=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 54 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Εφαρμόζοντας απαλοιφή Gauss ξεκινώντας από την τελευταία γραμμή και από τα δεξιά προς τα αριστερά. Για παράδειγμα:

$$\begin{array}{c}(-)\\(-)\\(1/3)(1/3)\end{array}\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\1 & 3 & 1\\1 & 1 & 3\end{bmatrix} \Bigg| \begin{bmatrix}1 & * & *\\0 & 1 & *\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{array}{c}(-)\\ \\(1/4)\end{array}\begin{bmatrix}8/3 & 2/3 & 0\\2/3 & 8/3 & 0\\1 & 1 & 3\end{bmatrix} \Bigg| \begin{bmatrix}1 & * & 1/3\\0 & 1 & 1/3\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{5}{2} & 0 & 0\\2/3 & 8/3 & 0\\1 & 1 & 3\end{bmatrix}}_{L} \Bigg| \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1/4 & 1/3\\0 & 1 & 1/3\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{U}$$

όπου τώρα οι οδηγοί βρίσκονται στον L, και γενικά τα L και U θα είναι διαφορετικά από εκείνα της παραγοντοποίησης $A=LU$ (π.χ. συγκρίνετε τα παραπάνω L, U με εκείνα της Άσκησης 8β).

ΑΣΚΗΣΗ 12

α) $$\begin{array}{c}(-2)\\(-)\\ \\\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 2 & -2\\-2 & -8 & 3 & 32\\0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 2 & -2\\0 & 0 & 7 & 28\\0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right]\begin{array}{c} \\ \text{εναλλαγή}\\ \\\end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 2 & -2\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 7 & 28\end{array}\right]$$

Ανάστροφη αντικατάσταση:

3η εξίσωση: $7w=28 \iff w=4$

2η εξίσωση: $v+w=1 \iff v=1-w \Rightarrow v=-3$

1η εξίσωση: $u+4v+2w=-2 \iff u=-2-4v-2w \Rightarrow u=2$

Ο πίνακας που απαιτείται για την εναλλαγή της 2ης με την 3η γραμμή είναι $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

β) $\left[\begin{array}{ccc|c}0&1&1&0\\1&1&0&0\\1&1&1&1\end{array}\right]$ εναλλαγή $\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1&0\\1&1&1&1\end{array}\right] \begin{array}{l}1\\ \\ (-)\end{array} \sim$

$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{array}\right]$

Ανάδρομη αντικατάσταση:

3η εξίσωση: $w=1$

2η εξίσωση: $v+w=0 \Leftrightarrow v=-w \Rightarrow v=-1$

1η εξίσωση: $u+v=0 \Leftrightarrow u=-v \Rightarrow u=1$

Ο πίνακας που απαιτείται για την εναλλαγή της 1ης με τη 2η γραμμή είναι $P=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 13}}$

α) εναλλαγή $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\2&3&4\end{bmatrix} \Big| \begin{bmatrix}1&0&0\\ *&1&0\\ *&*&1\end{bmatrix}$

$\begin{array}{cc}2&0\\ &\\ (-)&\end{array}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\2&3&4\end{bmatrix} \Big| \underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\ *&1&0\\ *&*&1\end{bmatrix}}_{L} \Big| \underbrace{\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{P}$

$$\sim \begin{array}{c} \\ \\ 3\,(-) \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & * & 1 \end{bmatrix} \right| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{U} \left| \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \right| \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P}$$

$$U = DU' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα $PA = LDU' \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Κάντε την επαλήθευση !)

β) $\begin{array}{c} \\ 2\,(-) \\ 1\,(-) \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 1 \end{bmatrix} \right.$

$$\sim \begin{array}{c} \\ \text{εναλλαγή} \\ \text{εναλλαγή} \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & * & 1 \end{bmatrix} \right.$$

(Σημ. μπορούμε να δούμε κατευθείαν από τη 2η γραμμή ότι έχουμε ιδιομορφία, όμως για να δείξουμε μεθοδολογία συνεχίζουμε)

$$\sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U} \left| \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & * & 1 \end{bmatrix}}_{L} \right| \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P}$$

Ιδιομορφία
$\nexists\, P$ τ.ω.
$PA = LDU'$

ΑΣΚΗΣΗ 14

α) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \alpha & 8 & 3 \\ 0 & b & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 8-2\alpha & 3 \\ 0 & b & 5 \end{bmatrix}$

Αν $b=0$ & $8-2\alpha \neq 0$, τότε μη-ιδιόμορφος πίνακας

Αν $b=0$ & $8-2\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=4$, τότε ιδιόμορφος πίνακας

Αν $8-2\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=4$ και $b\neq 0$, τότε εναλλαγή γραμμών 2,3

δίνει: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & b & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ μη-ιδιόμορφος.

β) Αν $c=0$, τότε $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ εναλλαγή $\sim \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ μη-ιδιόμορφος

Αν $c\neq 0$, τότε $\begin{bmatrix} c & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{6/c} \sim \begin{bmatrix} c & 2 \\ 0 & 4-\frac{12}{c} \end{bmatrix}$

Αν $4-\frac{12}{c}=0 \Leftrightarrow c=3$, τότε $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ιδιόμορφος