ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Γραμμική Άλγεβρα Ι» (ΕΜ111) – Χειμερινό Εξάμηνο 2006-2007, Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

2^Ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Εφαρμόστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss για να επιλύσετε καθένα από τα παρακάτω συστήματα εξισώσεων:

$$\alpha)\ \begin{cases} 2u-3v-z=5 \\ 4u+v-2w+3z=-1 \\ -2u+7v+w=3 \\ -u+v+3w-z=1 \end{cases},\quad \beta)\ \begin{cases} 2u+v+w=5 \\ 4u+2v+2w=6 \\ -2u+7v+2w=9 \end{cases},\quad \gamma)\ \begin{cases} u+v+w=2 \\ 2u+3w=5 \\ 3u+v+4w=6 \end{cases},\quad \delta)\ \begin{cases} u+v+w-2z=2 \\ 2u+3w-z=5 \\ -u+3v-w+z=-3 \\ 4u+8v+6w-4z=8 \end{cases}$$

Στην περίπτωση ιδιόμορφου συστήματος προσδιορίστε εάν το σύστημα είναι ασύμβατο (δεν έχει λύση), ή απροσδιόριστο (άπειρες λύσεις).

Άσκηση 2: Έστω το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} u+v+w&=-2 \\ 2u+2v-w&=5 \\ u-3v+2w&=-1 \end{aligned}$$

α) Εφαρμόστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss για να το επιλύσετε.
β) Αλλάξτε το συντελεστή του v στην τρίτη εξίσωση, ώστε να πάρετε ένα σύστημα που δεν έχει λύση.
γ) Αλλάξτε τη σταθερά στο δεξί μέλος της νέας εξίσωσης, έτσι ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις.

Άσκηση 3: Υπολογίστε τα γινόμενα πινάκων:

$$\alpha)\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3.1 \\ 3 & 1 & -0.2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.3 \\ 1.2 \end{bmatrix},\qquad \beta)\ \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1.3 & 2 \\ \pi/3 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6\cos(\pi/6) & 7 & 2\sin(\pi/4) \\ \tan(\pi/4) & 2\sqrt{3} & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\gamma)\ \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -\pi & 1/3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -3 & -2 \\ \sqrt{\pi} & 4 \end{bmatrix},\qquad \delta)\ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix},\qquad \varepsilon)\ \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 4: Γράψτε τους 3 επί 3 πίνακες $A=(a_{ij})$ και $B=(b_{ij})$ με στοιχεία $a_{ij}=i^2-j$, $b_{ij}=j^2$, και υπολογίστε τα γινόμενα AB, BA και $(-2)A^2$, και το άθροισμα $AB+BA$.

Άσκηση 5: Γράψτε τους 3 επί 3 πίνακες $A=(a_{ij})$ και $B=(b_{ij})$ με στοιχεία $a_{ij}=i+j$ και $b_{ij}=(-1)^{i+j}$.

Άσκηση 6: Οι πίνακες που «στρέφουν» το επίπεδο x, y είναι της μορφής $A(\theta)=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

α) Επαληθεύστε την εξίσωση $A(\theta_1)A(\theta_2)=A(\theta_1+\theta_2)$ χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες για το $\cos(\theta_1+\theta_2)$ και το $\sin(\theta_1+\theta_2)$.
β) Ποιο είναι το γινόμενο $A(\theta)$ επί $A(-\theta)$;

Άσκηση 7: Ένας άλλος τρόπος να δούμε τον πολλαπλασιασμό πινάκων, ως στήλες επί γραμμές. Συγκεκριμένα, αν οι στήλες του A είναι $c_1,\ldots,c_n$ και οι γραμμές του B είναι τα διανύσματα-γραμμές $r_1,\ldots,r_n$, τότε c_1r_1 είναι ένας πίνακας και $AB=c_1r_1+c_2r_2+\ldots+c_nr_n$

α) Δώστε ένα παράδειγμα 2 επί 2 αυτού του κανόνα πολλαπλασιασμού.
Β) Εξηγήστε γιατί η δεξιά πλευρά δίνει τη σωστή τιμή $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ για το στοιχείο $(AB)_{ij}$.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (ΕΜ 111)
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ 2ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

α)
$$\begin{aligned} 2u - 3v \quad\quad - z &= 5 \\ 4u + v - 2w + 3z &= -1 \\ -2u + 7v + w \quad\quad &= 3 \\ -u + v + 3w - z &= 1 \end{aligned}$$

Ο συντελεστής του u στην 1η εξίσωση είναι $2 \neq 0$, οπότε 1ος οδηγός

Πολλαπλασιάζουμε την 1η εξίσωση με 2 & την αφαιρούμε από την 2η

» » 1η » με (-1) & » » » » 3η

» » 1η » με $\left(-\frac{1}{2}\right)$ & » » » » 4η

$$\left.\begin{aligned} &2u-3v \quad\quad -z = 5 \\ &(4u+v-2w+3z)-(4u-6v-2z) = -1-10 \\ &(-2u+7v+w) - (-2u+3v+z) = 3-(-5) \\ &(-u+v+3w-z)-\left(-u+\frac{3}{2}v+\frac{1}{2}z\right) = 1-\left(-\frac{5}{2}\right) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 2u - 3v \quad\quad - z &= 5 \\ 7v - 2w + 5z &= -11 \\ 4v + w - z &= 8 \\ -\frac{1}{2}v + 3w - \frac{3}{2}z &= \frac{7}{2} \end{aligned}\right.$$

$\{2$ος οδηγός$\} = 7$

Πολλ/ζουμε τη 2η εξίσωση με $\left(\frac{4}{7}\right)$ και την αφαιρούμε από την 3η

» » 2η » » $\left(-\frac{1}{14}\right)$ και την » » την 4η

$$\left.\begin{array}{l}
2u - 3v \qquad - z = 5 \\
\qquad 7v - 2w + 5z = -11 \\
(4v + w - z) - \left(4v - \frac{8}{7}w + \frac{20}{7}z\right) = 8 - \left(-\frac{44}{7}\right) \\
\left(-\frac{1}{2}v + 3w - \frac{3}{2}z\right) - \left(-\frac{1}{2}v + \frac{1}{7}w - \frac{5}{14}z\right) = \frac{7}{2} - \left(\frac{11}{14}\right)
\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}
2u - 3v \qquad - z = 5 \\
\qquad 7v - 2w + 5z = -11 \\
\qquad\qquad \frac{15}{\cancel{7}}w - \frac{27}{\cancel{7}}z = \frac{100}{\cancel{7}} \\
\qquad\qquad \frac{20}{\cancel{7}}w - \frac{8}{\cancel{7}}z = \frac{19}{\cancel{7}}
\end{array}\right.$$

Πολλ/ζουμε την 3η εξίσωση με $\frac{20}{15}\left(=\frac{4}{3}\right)$ και την αφαιρούμε από την 4η

$$\left.\begin{array}{l}
2u - 3v \qquad - z = 5 \\
\qquad 7v - 2w + 5z = -11 \\
\qquad\qquad 15w - 27z = 100 \\
(20w - 8z) - (20w - 36z) = 19 - \frac{400}{3}
\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}
2u - 3v \qquad - z = 5 \\
\qquad 7v - 2w + 5z = -11 \\
\qquad\qquad 15w - 27z = 100 \\
\qquad\qquad\qquad 28z = -\frac{343}{3}
\end{array}\right.$$

Ανάδρομη Αντικατάσταση:

4η Εξίσωση: $z = -49/12$

3η Εξίσωση: $w = -41/60$

2η Εξίσωση: $v = 161/140$

1η Εξίσωση: $u = 131/60$

β)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 2 & 6 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{bmatrix}$$

αφαιρούμε 2 φορές την 1η από τη 2η και (-1) φορές την 1η από την 3η γραμμή (εξίσωση)

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

επειδή 2ος οδηγός=0 εναλλάσουμε 2η με 3η γραμμή έτσι ώστε 2ος οδηγός $\neq 0$

Από 3η εξίσωση: $0u + 0v + 0w = -4$ ΑΣΥΜΒΑΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ (καμία λύση)

γ)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

αφαιρούμε 2 φορές την 1η από τη 2η και 3 φορές την 1η από την 3η εξίσωση

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

αφαιρούμε 1 φορά την 2η από την 3η εξίσωση

3η εξίσωση: $0u + 0v + 0w = -4$, άρα ασύμβατο σύστημα (καμία λύση)

δ)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & -3 \\ 4 & 8 & 6 & -4 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

αφαιρούμε 2 φορές την 1η από τη 2η, (-1) φορές την 1η από τη 3η και 4 φορές την 1η από την 4η εξίσωση

$\longrightarrow$ αφαιρούμε (-2) φορές την 2η από την 3η και από την 4η εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ αφαιρούμε 2 φορές την 3η από την 4η εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4η εξίσωση: $0u + 0v + 0w + 0z = 0$ που ικανοποιείται $\forall (u,v,w,z) \in \mathbb{R}^4$

3η εξίσωση: $2w + 5z = 1 \Leftrightarrow w = \frac{1-5z}{2}$

2η εξίσωση: $-2v + w + 3z = 1 \Rightarrow v = \frac{z-1}{4}$

1η εξίσωση: $u + v + w - 2z = 2 \Rightarrow u = \frac{17z+7}{4}$

Δηλαδή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$\left(\frac{17z+7}{4}, \frac{z-1}{4}, \frac{1-5z}{2}, z\right), \quad \text{με } z \in \mathbb{R}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

α) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$ αφαιρούμε 2 φορές την 1η από τη 2η και 1 φορά την 1η από την 3η εξίσωση $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$ εναλλαγή 2ης με 3η εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

3η εξίσωση: $-3w = 9 \Leftrightarrow w = -3$

2η εξίσωση: $-4v + w = 1 \Rightarrow v = -1$

1η εξίσωση: $u + v + w = -2 \Rightarrow u = 2$

Δηλ. $(u,v,w) = (2,-1,-3)$ μοναδική λύση β) Έστω λ ο συντελεστής του v στην 3η εξίσωση. Τότε:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & \lambda & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{όπως στο } (\alpha)]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & \lambda-1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Αν $\lambda=1$, τότε $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ το σύστημα είναι

ιδιόμορφο. Συγκεκριμένα, $\left.\begin{cases} \text{2η εξίσωση: } -3w=9 \Leftrightarrow w=-3 \\ \text{3η εξίσωση: } \quad w=1 \end{cases}\right\}$ ασύμβατο (καμία λύση)

γ) Έστω b η σταθερά στο δεξί μέλος της 3η εξίσωσης. Τότε:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & b \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{όπως } (\alpha)]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & b+2 \end{bmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} \text{2η εξίσωση: } -3w=9 \Leftrightarrow w=-3 \\ \text{3η εξίσωση: } \quad w=b+2 \end{array}\right\}$ $b+2=-3 \Leftrightarrow b=-5$, για να έχει το ιδιόμορφο σύστημα άπειρες λύσεις

ΑΣΚΗΣΗ 3

α) $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3.1 \\ 3 & 1 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.3 \\ 1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1.5 + (-2)\,2.3 + 3.1\cdot 1.2 \\ 3\cdot 1.5 + 1\cdot 2.3 + (-0.2)\,1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.62 \\ 6.56 \end{bmatrix}$$

(Πίνακας 2Χ3)(Πίνακας 3Χ1) = (Πίνακας 2Χ1)

β) $$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1.3 & 2 \\ \pi/3 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6\cos(\pi/6) & 7 & \sin(\pi/4) \\ \tan(\pi/4) & 2\sqrt{3} & 0 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1.3 & 2 \\ \pi/3 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3\sqrt{3} & 7 & \sqrt{2} \\ 1 & 2\sqrt{3} & 0 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + (\sqrt{2})1 & 1\cdot 3\sqrt{3} + (\sqrt{2})(2\sqrt{3}) & 1\cdot 7 + (\sqrt{2})\cdot 0 & 1\cdot\sqrt{2} + (\sqrt{2})3 \\ (1.3)2 + 2\cdot 1 & (1.3)(3\sqrt{3}) + 2(2\sqrt{3}) & (1.3)7 + 2\cdot 0 & (1.3)(\sqrt{2}) + 2\cdot 3 \\ \frac{2\pi}{3} + (\sqrt{3})\cdot 1 & (\frac{\pi}{3})(3\sqrt{3}) + (\sqrt{3})(2\sqrt{3}) & (\frac{\pi}{3})7 + (\sqrt{3})\cdot 0 & (\frac{\pi}{3})\sqrt{2} + (\sqrt{3})3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} & 3\sqrt{3}+2\sqrt{6} & 7 & 4\sqrt{2} \\ 4.6 & 7.9\sqrt{3} & 9.1 & 1.3\sqrt{2}+6 \\ \frac{2\pi}{3}+\sqrt{3} & \pi\sqrt{3}+6 & 7\pi/3 & \frac{\pi}{3}\sqrt{2}+3\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(πίνακας 3Χ2)(πίνακας 2Χ4) = (πίνακας 3Χ4)

γ) $$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -\pi & 1/3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -3 & -2 \\ \sqrt{\pi} & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{1}{4} + 0(-3) + (-1)\sqrt{\pi} & \frac{1}{2}0 + 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 4 \\ (-\pi)\frac{1}{4} + \frac{1}{3}(-3) + 4\sqrt{\pi} & (-\pi)0 + \frac{1}{3}(-2) + 4\cdot 4 \\ 0\cdot\frac{1}{4} + 2(-3) + 0\sqrt{\pi} & 0\cdot 0 + 2(-2) + 0\cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{8} - \sqrt{\pi} & -4 \\ 4\sqrt{\pi} - \frac{\pi}{4} - 1 & 46/3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$$

(πίνακας 3Χ3)(πίνακας 3Χ2) = (πίνακας 3Χ2)

δ) $$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)(-1) & (-1)3 & (-1)2 \\ 0\cdot(-1) & 0\cdot 3 & 0\cdot 2 \\ 7(-1) & 7\cdot 3 & 7\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -7 & 21 & 14 \end{bmatrix}$$

(πίνακας 3Χ1)(πίνακας 1Χ3) = (πίνακας 3Χ3)

ε) $$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)(-1) + 3\cdot 0 + 2\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \end{bmatrix}$$

(πίνακας 1Χ3)(πίνακας 3Χ1) = (πίνακας 1Χ1) δηλ. πίνακας-στοιχείο

ΑΣΚΗΣΗ 4

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$ με $\alpha_{ij} = i^2 - j$, άρα:

$$A = \begin{bmatrix} 1^2-1 & 1^2-2 & 1^2-3 \\ 2^2-1 & 2^2-2 & 2^2-3 \\ 3^2-1 & 3^2-2 & 3^2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Για τον $B = (b_{ij})$ με $b_{ij} = j^2$, έχουμε:

$$B = \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + (-2)\cdot 1 & 0\cdot 4 + (-1)\cdot 4 + (-2)4 & 0\cdot 9 + (-1)9 + (-2)9 \\ 3\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 1 & 3\cdot 4 + 2\cdot 4 + 1\cdot 4 & 3\cdot 9 + 2\cdot 9 + 1\cdot 9 \\ 8\cdot 1 + 7\cdot 1 + 6\cdot 1 & 8\cdot 4 + 7\cdot 4 + 6\cdot 4 & 8\cdot 9 + 7\cdot 9 + 6\cdot 9 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -12 & -27 \\ 6 & 24 & 54 \\ 21 & 84 & 189 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 4\cdot 3 + 9\cdot 8 & 1\cdot(-1) + 4\cdot 2 + 9\cdot 7 & 1\cdot(-2) + 4\cdot 1 + 9\cdot 6 \\ \gg & \gg & \gg \\ \gg & \gg & \gg \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 84 & 70 & 56 \\ 84 & 70 & 56 \\ 84 & 70 & 56 \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση: $AB \neq BA$

$$(-2)\,A^2 = (-2)\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= (-2)\begin{bmatrix} -3-16 & -2-14 & -1-12 \\ 6+8 & -3+4+7 & -6+2+6 \\ 21+48 & -8+14+42 & -16+7+36 \end{bmatrix} =$$

$$= (-2)\begin{bmatrix} -19 & -16 & -13 \\ 14 & 8 & 2 \\ 69 & 48 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 32 & 26 \\ -28 & -16 & -4 \\ -138 & -96 & -54 \end{bmatrix}$$

$$AB + BA = \begin{bmatrix} -3 & -12 & -27 \\ 6 & 24 & 54 \\ 21 & 84 & 189 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 84 & 70 & 56 \\ 84 & 70 & 56 \\ 84 & 70 & 56 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 81 & 58 & 29 \\ 90 & 94 & 110 \\ 105 & 154 & 245 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

α) $$A(\theta_1)\,A(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} = A(\theta_1+\theta_2)$$

β) $$A(\theta)\,A(-\theta) = A(\theta-\theta) = A(0) = \begin{bmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

α) $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \alpha_{11}b_{11} + \alpha_{12}b_{21} & \alpha_{11}b_{12} + \alpha_{12}b_{22} \\ \alpha_{21}b_{11} + \alpha_{22}b_{21} & \alpha_{21}b_{12} + \alpha_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$c_1r_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}b_{11} & \alpha_{11}b_{12} \\ \alpha_{21}b_{11} & \alpha_{21}b_{12} \end{bmatrix}$$

$$c_2r_2 = \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{12}b_{21} & \alpha_{12}b_{22} \\ \alpha_{22}b_{21} & \alpha_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$c_1r_1 + c_2r_2 = AB$$

<u>Παράδειγμα:</u>

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$c_1r_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & -4 \\ 21 & -3 \end{bmatrix}$$

$$c_2r_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = c_1r_1 + c_2r_2 = \begin{bmatrix} 24 & -14 \\ 23 & 2 \end{bmatrix}$$

β) Για $A=(\alpha_{ij})$, $B=(b_{ij})$ πίνακες $n \times n$, τότε

$$c_k r_k = \begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1k}b_{k1} & \alpha_{1k}b_{k2} & \cdots & \alpha_{1k}b_{kn} \\ \alpha_{2k}b_{k1} & \alpha_{2k}b_{k2} & \cdots & \alpha_{2k}b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{nk}b_{k1} & \alpha_{nk}b_{k2} & \cdots & \alpha_{nk}b_{kn} \end{bmatrix}$$

δηλ. $(c_k r_k)_{ij} = \alpha_{ik}b_{kj}$, οπότε: $\sum_{k=1}^{n} (c_k r_k)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}b_{kj} = (AB)_{ij}$