ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Γραμμική Άλγεβρα & Αναλυτική Γεωμετρία» (ΕΜ111) – Χειμερινό Εξάμηνο 2008-2009
Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

2^{O} ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Εφαρμόστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss για να επιλύσετε καθένα από τα παρακάτω συστήματα εξισώσεων:

α) $\begin{cases} 2u-3v-z=5 \\ 4u+v-2w+3z=-1 \\ -2u+7v+w=3 \\ -u+v+3w-z=1 \end{cases}$, β) $\begin{cases} 2u+v+w=5 \\ 4u+2v+2w=6 \\ -2u+7v+2w=9 \end{cases}$, γ) $\begin{cases} u+v+w=2 \\ 2u+3w=5 \\ 3u+v+4w=6 \end{cases}$, δ) $\begin{cases} u+v+w-2z=2 \\ 2u+3w-z=5 \\ -u+3v-w+z=-3 \\ 4u+8v+6w-4z=8 \end{cases}$

Στην περίπτωση ιδιόμορφου συστήματος προσδιορίστε εάν το σύστημα είναι ασύμβατο (δεν έχει λύση), ή απροσδιόριστο (άπειρες λύσεις).

Άσκηση 2: Έστω το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} u+v+w&=-2 \\ 2u+2v-w&=5 \\ u-3v+2w&=-1 \end{aligned}$$

α) Εφαρμόστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss για να το επιλύσετε.
β) Αλλάξτε το συντελεστή του v στην τρίτη εξίσωση, ώστε να πάρετε ένα σύστημα που δεν έχει λύση.
γ) Αλλάξτε τη σταθερά στο δεξί μέλος της νέας εξίσωσης, έτσι ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις.

Άσκηση 3: Υπολογίστε τα γινόμενα πινάκων:

α) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3.1 \\ 3 & 1 & -0.2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.3 \\ 1.2 \end{bmatrix}$, β) $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1.3 & 2 \\ \pi/3 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6\cos(\pi/6) & 7 & 2\sin(\pi/4) \\ \tan(\pi/4) & 2\sqrt{3} & 0 & 3 \end{bmatrix}$,

γ) $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -\pi & 1/3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -3 & -2 \\ \sqrt{\pi} & 4 \end{bmatrix}$, δ) $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, ε) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$

Άσκηση 4: Γράψτε τους 3 επί 3 πίνακες $A=\left(a_{ij}\right)$ και $B=\left(b_{ij}\right)$ με στοιχεία $a_{ij}=i^2-j$, $b_{ij}=j^2$, και υπολογίστε τα γινόμενα AB, BA και $(-2)A^2$, και το άθροισμα $AB+BA$.

Άσκηση 5: Γράψτε τους 3 επί 3 πίνακες $A=\left(a_{ij}\right)$ και $B=\left(b_{ij}\right)$ με στοιχεία $a_{ij}=i+j$ και $b_{ij}=(-1)^{i+j}$.

Άσκηση 6: Οι πίνακες που «στρέφουν» τους άξονες x, y είναι της μορφής $A(\theta)=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

α) Επαληθεύστε την εξίσωση $A(\theta_1)A(\theta_2)=A(\theta_1+\theta_2)$ χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες για το $\cos(\theta_1+\theta_2)$ και το $\sin(\theta_1+\theta_2)$.
β) Ποιο είναι το γινόμενο $A(\theta)$ επί $A(-\theta)$;

Άσκηση 7: Ένας άλλος τρόπος να δούμε τον πολλαπλασιασμό πινάκων, ως στήλες επί γραμμές. Συγκεκριμένα, αν οι στήλες του A είναι $c_1,\ldots,c_n$ και οι γραμμές του B είναι τα διανύσματα-γραμμές $r_1,\ldots,r_n$, τότε c_1r_1 είναι ένας πίνακας και $AB=c_1r_1+c_2r_2+\ldots+c_nr_n$

α) Δώστε ένα παράδειγμα 2 επί 2 αυτού του κανόνα πολλαπλασιασμού.
β) Εξηγήστε γιατί η δεξιά πλευρά δίνει τη σωστή τιμή $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ για το στοιχείο $(AB)_{ij}$.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ & ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (ΕΜ-111)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ 2ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

α)
$$\begin{aligned} 2u - 3v \phantom{{}-2w} - z &= 5 \\ 4u + v - 2w + 3z &= -1 \\ -2u + 7v + w \phantom{{}+3z} &= 3 \\ -u + v + 3w - z &= 1 \end{aligned}$$

Ο συντελεστής του u στην 1η εξίσωση είναι $2 \neq 0$, οπότε 1ος οδηγός

Πολλαπλασιάζουμε την 1η εξίσωση με (-2) & την προσθέτουμε στην 2η

» » 1η » με 1 & » » » 3η

» » 1η » με $\frac{1}{2}$ & » » » 4η

$$\left.\begin{aligned} &2u-3v \phantom{{}-2w} -z = 5 \\ &(4u+v-2w+3z)+(-4u+6v+2z) = -1-10 \\ &(-2u+7v+w) + (2u-3v-z) = 3+5 \\ &(-u+v+3w-z)+\left(u-\tfrac{3}{2}v-\tfrac{1}{2}z\right) = 1+\tfrac{5}{2} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 2u - 3v \phantom{{}-2w} - z &= 5 \\ 7v - 2w + 5z &= -11 \\ 4v + w - z &= 8 \\ -\tfrac{1}{2}v + 3w - \tfrac{3}{2}z &= \tfrac{7}{2} \end{aligned}\right.$$

$\{2\text{ος οδηγός}\} = 7$

Πολλ/ζουμε τη 2η εξίσωση με $\left(-\frac{4}{7}\right)$ και την προσθέτουμε στην 3η

» » 2η » » $\frac{1}{14}$ και την » » 4η

$$\left.\begin{array}{l} 2u - 3v \qquad - z = 5 \\ \quad 7v - 2w + 5z = -11 \\ (4v + w - z) + \left(-4v + \frac{8}{7}w - \frac{20}{7}z\right) = 8 + \frac{44}{7} \\ \left(-\frac{1}{2}v + 3w - \frac{3}{2}z\right) + \left(\frac{1}{2}v - \frac{1}{7}w + \frac{5}{14}z\right) = \frac{7}{2} - \frac{11}{14} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2u - 3v \qquad - z = 5 \\ \quad 7v - 2w + 5z = -11 \\ \qquad \frac{15}{\cancel{7}}w - \frac{27}{\cancel{7}}z = \frac{100}{\cancel{7}} \\ \qquad \frac{20}{\cancel{7}}w - \frac{8}{\cancel{7}}z = \frac{19}{\cancel{7}} \end{array}\right.$$

Πολλ/ζουμε την 3η εξίσωση με $\left(-\frac{20}{15}\right) = -\frac{4}{3}$ και την προσθέτουμε στην 4η

$$\left.\begin{array}{l} 2u - 3v \qquad - z = 5 \\ \quad 7v - 2w + 5z = -11 \\ \qquad 15w - 27z = 100 \\ (20w - 8z) + (-20w + 36z) = 19 - \frac{400}{3} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2u - 3v \qquad - z = 5 \\ \quad 7v - 2w + 5z = -11 \\ \qquad 15w - 27z = 100 \\ \qquad\qquad 28z = -\frac{343}{3} \end{array}\right.$$

Ανάδρομη Αντικατάσταση:

4η Εξίσωση: $z = -49/12$

3η Εξίσωση: $w = -41/60$

2η Εξίσωση: $v = 161/140$

1η Εξίσωση: $u = 131/60$

Σημείωση: Η παραπάνω διαδικασία θα μπορούσε να γίνει παραλείποντας τους αγνώστους και χρησιμοποιώντας πίνακες με τους συντελεστές των αγνώστων και τους σταθερούς όρους, όπως γίνεται στα επόμενα συστήματα (β, γ και δ).

β)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 2 & 6 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{και την προσθέτουμε στη 2η, και προσθέτουμε την 1η στην 3η}]{\text{πολλαπλασιάζουμε την 1η με (-2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{εναλλάσουμε 2η με 3η γραμμή έτσι ώστε 2ος οδηγός} \neq 0]{\text{επειδή 2ος οδηγός=0}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

Από 3η εξίσωση: $0u + 0v + 0w = -4$ ==> ΑΣΥΜΒΑΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ (καμία λύση)

γ)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{στη 2η, και με (-3) και την προσθέτουμε στην 3η}]{\text{πολλαπλασιάζουμε την 1η με (-2) \& την προσθέτουμε}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{γραμμή με (-1) και την προσθέτουμε στην 3η}]{\text{πολλαπλασιάζουμε τη 2η}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

3η εξίσωση: $0u + 0v + 0w = -4$, άρα ασύμβατο σύστημα (καμία λύση)

δ)
$$\begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & -3 \\ 4 & 8 & 6 & -4 & 8 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{ccc} (-2) & 1 & (-4) \\ & & \\ (+) & & \\ & (+) & \\ & & (+) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{cc} & \\ 2 & 2 \\ (+) & \\ & (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 10 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ (-2) \\ \leftarrow (+) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

4η εξίσωση: $0u + 0v + 0w + 0z = 0$ που ικανοποιείται $\forall (u,v,w,z) \in \mathbb{R}^4$

3η εξίσωση: $2w + 5z = 1 \Leftrightarrow w = \dfrac{1-5z}{2}$

2η εξίσωση: $-2v + w + 3z = 1 \Rightarrow v = \dfrac{z-1}{4}$

1η εξίσωση: $u + v + w - 2z = 2 \Rightarrow u = \dfrac{17z+7}{4}$

Δηλαδή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$\left(\frac{17z+7}{4}, \frac{z-1}{4}, \frac{1-5z}{2}, z\right), \quad \text{με } z \in \mathbb{R}$$

Οι οποίες, χωρίζοντας τους συντελεστές του z, μπορούν να γραφτούν και ως εξής:

$$z\left(\frac{17}{4}, \ \frac{1}{4}, \ -\frac{5}{2}, \ 1\right) + \left(\frac{7}{4}, \ -\frac{1}{4}, \ \frac{1}{2}, \ 0\right), \quad \text{με } z \in \mathbb{R}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

α) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-2) \ (-1) \\ \leftarrow (+) \\ \leftarrow (+) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{με 3η γραμμή}]{\text{εναλλαγή 2ης}}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{array}\right]$$

Ανάδρομη Αντικατάσταση:

3η Εξίσωση: $-3w = 9 \Leftrightarrow w = -3$

2η Εξίσωση: $-4v + w = 1 \Rightarrow v = -1$

1η Εξίσωση: $u + v + w = -2 \Rightarrow u = 2$

Δηλ. $(u, v, w) = (2, -1, -3)$ μοναδική λύση β) Έστω λ ο συντελεστής του v στην 3η εξίσωση. Τότε:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & \lambda & 2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-2)\ (-1) \\ \leftarrow (+) \\ \leftarrow (+) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & \lambda-1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{εναλλαγή της 2ης με 3η γραμμή}}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{array}\right]$$

Άρα, το σύστημα είναι ιδιόμορφο (δεν υπάρχει πλήρες σύνολο μη-μηδενικών οδηγών) ανν λ=1. Σ' αυτήν την περίπτωση έχουμε:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ 3 \\ \leftarrow (+) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right]$$

3η εξίσωση: $0u + 0v + 0w = 12$, άρα ασύμβατο σύστημα (καμία λύση)

γ) Έστω b η σταθερά στο δεξί μέλος της 3η εξίσωσης. Τότε:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & b \end{array}\right] \begin{array}{l} (-2)\ (-1) \\ \leftarrow (+) \\ \leftarrow (+) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & b+2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (1/3) \\ \leftarrow (+) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & b+5 \end{array}\right]$$

3η εξίσωση: $0u + 0v + 0w = b+5$. Άρα, υπάρχει λύση ανν b=-5.

Σ' αυτήν την περίπτωση, έχουμε: 2η εξίσωση: $-3w = 9 \Leftrightarrow w = -3$

1η εξίσωση: $u + v + w = -2 \Rightarrow u = 1 - v$

Άρα, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής: $(1-v, v, -3)$, με $v \in \mathbb{R}$

Δηλ. $v(-1, 1, 0) + (1, 0, -3)$, με $v \in \mathbb{R}$

ΑΣΚΗΣΗ 3

α) $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3.1 \\ 3 & 1 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.3 \\ 1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1.5 + (-2)\,2.3 + 3.1\cdot 1.2 \\ 3\cdot 1.5 + 1\cdot 2.3 + (-0.2)\,1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.62 \\ 6.56 \end{bmatrix}$$

(πίνακας 2x3)(πίνακας 3x1) = (πίνακας 2x1)

β) $$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1.3 & 2 \\ \pi/3 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6\cos(\pi/6) & 7 & \sin(\pi/4) \\ \tan(\pi/4) & 2\sqrt{3} & 0 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1.3 & 2 \\ \pi/3 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3\sqrt{3} & 7 & \sqrt{2} \\ 1 & 2\sqrt{3} & 0 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + (\sqrt{2})1 & 1\cdot 3\sqrt{3} + (\sqrt{2})(2\sqrt{3}) & 1\cdot 7 + (\sqrt{2})\cdot 0 & 1\cdot\sqrt{2} + (\sqrt{2})3 \\ (1.3)2 + 2\cdot 1 & (1.3)(3\sqrt{3}) + 2(2\sqrt{3}) & (1.3)7 + 2\cdot 0 & (1.3)(\sqrt{2}) + 2\cdot 3 \\ \frac{2\pi}{3} + (\sqrt{3})\cdot 1 & (\frac{\pi}{3})(3\sqrt{3}) + (\sqrt{3})(2\sqrt{3}) & (\frac{\pi}{3})7 + (\sqrt{3})\cdot 0 & (\frac{\pi}{3})\sqrt{2} + (\sqrt{3})3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} & 3\sqrt{3}+2\sqrt{6} & 7 & 4\sqrt{2} \\ 4.6 & 7.9\sqrt{3} & 9.1 & 1.3\sqrt{2}+6 \\ \frac{2\pi}{3}+\sqrt{3} & \pi\sqrt{3}+6 & 7\pi/3 & \frac{\pi}{3}\sqrt{2}+3\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(πίνακας 3Χ2)(πίνακας 2Χ4) = (πίνακας 3Χ4)

γ) $$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -\pi & 1/3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -3 & -2 \\ \sqrt{\pi} & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{1}{4} + 0(-3) + (-1)\sqrt{\pi} & \frac{1}{2}0 + 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 4 \\ (-\pi)\frac{1}{4} + \frac{1}{3}(-3) + 4\sqrt{\pi} & (-\pi)0 + \frac{1}{3}(-2) + 4\cdot 4 \\ 0\cdot\frac{1}{4} + 2(-3) + 0\sqrt{\pi} & 0\cdot 0 + 2(-2) + 0\cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{8} - \sqrt{\pi} & -4 \\ 4\sqrt{\pi} - \frac{\pi}{4} - 1 & 46/3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$$

(πίνακας 3Χ3)(πίνακας 3Χ2) = (πίνακας 3Χ2)

δ) $$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)(-1) & (-1)3 & (-1)2 \\ 0\cdot(-1) & 0\cdot 3 & 0\cdot 2 \\ 7(-1) & 7\cdot 3 & 7\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -7 & 21 & 14 \end{bmatrix}$$

(πίνακας 3Χ1)(πίνακας 1Χ3) = (πίνακας 3Χ3)

ε) $$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)(-1) + 3\cdot 0 + 2\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \end{bmatrix}$$

(πίνακας 1Χ3)(πίνακας 3Χ1) = (πίνακας 1Χ1) δηλ. πίνακας-στοιχείο

ΑΣΚΗΣΗ 4

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \quad \text{με} \quad \alpha_{ij} = i^2 - j, \quad \text{άρα:}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1^2-1 & 1^2-2 & 1^2-3 \\ 2^2-1 & 2^2-2 & 2^2-3 \\ 3^2-1 & 3^2-2 & 3^2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Για τον $B = (b_{ij})$ με $b_{ij} = j^2$, έχουμε:

$$B = \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0\cdot1 + (-1)\cdot1 + (-2)\cdot1 & 0\cdot4 + (-1)\cdot4 + (-2)4 & 0\cdot9 + (-1)9 + (-2)9 \\ 3\cdot1 + 2\cdot1 + 1\cdot1 & 3\cdot4 + 2\cdot4 + 1\cdot4 & 3\cdot9 + 2\cdot9 + 1\cdot9 \\ 8\cdot1 + 7\cdot1 + 6\cdot1 & 8\cdot4 + 7\cdot4 + 6\cdot4 & 8\cdot9 + 7\cdot9 + 6\cdot9 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -12 & -27 \\ 6 & 24 & 54 \\ 21 & 84 & 189 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot0 + 4\cdot3 + 9\cdot8 & 1\cdot(-1) + 4\cdot2 + 9\cdot7 & 1\cdot(-2) + 4\cdot1 + 9\cdot6 \\ \gg & \gg & \gg \\ \gg & \gg & \gg \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 84 & 70 & 56 \\ 84 & 70 & 56 \\ 84 & 70 & 56 \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση: $AB \neq BA$

$$(-2)A^2 = (-2)\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= (-2)\begin{bmatrix} -3-16 & -2-14 & -1-12 \\ 6+8 & -3+4+7 & -6+2+6 \\ 21+48 & -8+14+42 & -16+7+36 \end{bmatrix} =$$

$$= (-2)\begin{bmatrix} -19 & -16 & -13 \\ 14 & 8 & 2 \\ 69 & 48 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 32 & 26 \\ -28 & -16 & -4 \\ -138 & -96 & -54 \end{bmatrix}$$

$$AB + BA = \begin{bmatrix} -3 & -12 & -27 \\ 6 & 24 & 54 \\ 21 & 84 & 189 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 84 & 70 & 56 \\ 84 & 70 & 56 \\ 84 & 70 & 56 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 81 & 58 & 29 \\ 90 & 94 & 110 \\ 105 & 154 & 245 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

α) $$A(\theta_1)\,A(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} = A(\theta_1+\theta_2)$$

β) $$A(\theta)\,A(-\theta) = A(\theta-\theta) = A(0) = \begin{bmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

α) $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \alpha_{11}b_{11} + \alpha_{12}b_{21} & \alpha_{11}b_{12} + \alpha_{12}b_{22} \\ \alpha_{21}b_{11} + \alpha_{22}b_{21} & \alpha_{21}b_{12} + \alpha_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$c_1 r_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}b_{11} & \alpha_{11}b_{12} \\ \alpha_{21}b_{11} & \alpha_{21}b_{12} \end{bmatrix}$$

$$c_2 r_2 = \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{12}b_{21} & \alpha_{12}b_{22} \\ \alpha_{22}b_{21} & \alpha_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$c_1 r_1 + c_2 r_2 = AB$$

<u>Παράδειγμα:</u>

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$c_1 r_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & -4 \\ 21 & -3 \end{bmatrix}$$

$$c_2 r_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = c_1 r_1 + c_2 r_2 = \begin{bmatrix} 24 & -14 \\ 23 & 2 \end{bmatrix}$$

β) Για $A = (\alpha_{ij})$, $B = (b_{ij})$ πίνακες $n \times n$, τότε

$$c_k r_k = \begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1k}b_{k1} & \alpha_{1k}b_{k2} & \dots & \alpha_{1k}b_{kn} \\ \alpha_{2k}b_{k1} & \alpha_{2k}b_{k2} & \dots & \alpha_{2k}b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{nk}b_{k1} & \alpha_{nk}b_{k2} & \dots & \alpha_{nk}b_{kn} \end{bmatrix}$$

δηλ. $(c_k r_k)_{ij} = \alpha_{ik} b_{kj}$, οπότε: $\sum_{k=1}^{n} (c_k r_k)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} b_{kj} = (AB)_{ij}$