ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Γραμμική Άλγεβρα Ι» (ΕΜ111) – Χειμερινό Εξάμηνο 2006-2007, Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

1^{o} ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Σχεδιάστε τις ευθείες

$$u - v = -3$$
$$u + 3v = 1$$

α) Βρείτε από το σχήμα τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών.
β) Αλλάξτε το συντελεστή του u στη δεύτερη εξίσωση, έτσι ώστε οι δύο ευθείες να είναι παράλληλες και διακριτές.
γ) Αλλάξτε το σταθερό συντελεστή της νέας εξίσωσης έτσι ώστε οι δύο ευθείες να συμπίπτουν.
δ) Γράψτε το αρχικό σύστημα σε μορφή διανυσματικής εξίσωσης. Σχεδιάστε τα τρία διανύσματα, και επαληθεύσατε ότι οι τιμές του u και v που βρήκατε στο ερώτημα (α) ικανοποιούν τον κανόνα του παραλληλογράμμου για το άθροισμα των διανυσμάτων.

Άσκηση 2: Για καθένα από τα παρακάτω συστήματα προσδιορίστε τη σχετική μεταξύ των επιπέδων θέση στον τρισδιάστατο χώρο και την ύπαρξη λύσης του συστήματος βάσει αυτής της θέσης.

$$\text{α)}\ \begin{cases} 2u + v + w = 5 \\ 4u + 2v + 2w = 6 \\ -2u + 7v + 2w = 9 \end{cases}, \quad \text{β)}\ \begin{cases} u + v + w = 2 \\ 2u + 3w = 5 \\ 3u + v + 4w = 6 \end{cases}, \quad \text{γ)}\ \begin{cases} u + v + w = 2 \\ 2u + 3w = 5 \\ 3u + v + 4w = 7 \end{cases}$$

Άσκηση 3: Γράψτε το παρακάτω σύστημα σε μορφή διανυσματικής εξίσωσης.

$$u + v + w = b_1$$
$$u + 2v + 3w = b_2$$
$$v + 2w = b_3$$

Δείξτε ότι τα διανύσματα στο αριστερό μέλος της προκύπτουσας διανυσματικής εξίσωσης είναι συνεπίπεδα, εκφράζοντας το τρίτο διάνυσμα ως γραμμικό συνδυασμό των δύο άλλων. Ποια μορφή πρέπει να έχει το διάνυσμα (b_1, b_2, b_3) ώστε το σύστημα να έχει λύση; Δώστε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα γι' αυτήν την περίπτωση. Είναι αυτή η λύση μοναδική;

Άσκηση 4: Ποια μορφή έχουν τα διανύσματα που είναι κάθετα σε καθένα από τα επίπεδα του συστήματος της Άσκησης 3; Ποια είναι τα σημεία τομής των επιπέδων με τους άξονες Ou, Ov, και Ow;

Άσκηση 5: Σχεδιάστε τις ευθείες

$$x + 2y = 2$$
$$x - y = 2$$
$$y = 1$$

α) Μπορούν να λυθούν ταυτόχρονα οι τρεις εξισώσεις; β) Τι συμβαίνει στο σχήμα όταν όλες οι δεξιές πλευρές είναι μηδέν; γ) Υπάρχει μη-μηδενική επιλογή των δεξιών πλευρών που επιτρέπει στις τρεις ευθείες να τέμνονται στο ίδιο σημείο, δηλ. στις τρεις εξισώσεις να έχουν μια λύση;

Άσκηση 6: Βρείτε δύο σημεία στην ευθεία τομής των τριών επιπέδων $t = 0$, $z = 0$, και $x + y + z + t = 1$ στον τετραδιάστατο χώρο.

Άσκηση 7: Οι εξισώσεις

$$ax + 2y = 0$$
$$2x + ay = 0$$

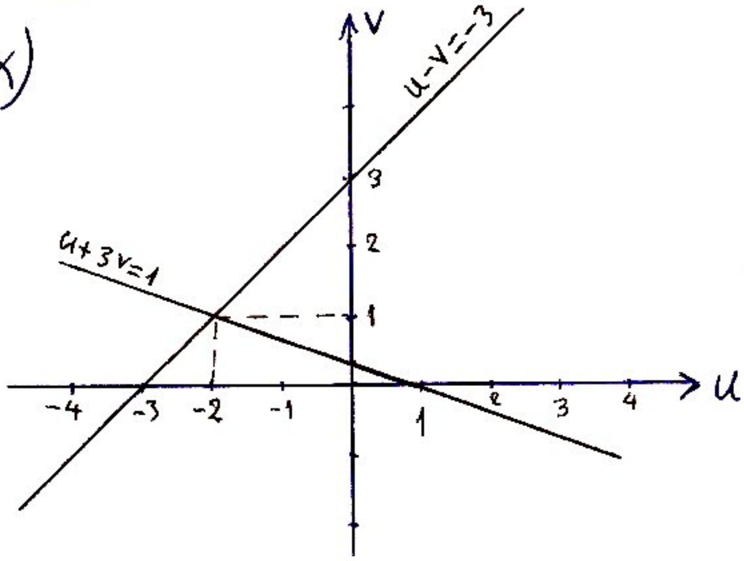
έχουν σίγουρα τη λύση $x = y = 0$. Για ποιες τιμές του a υπάρχει ολόκληρη ευθεία λύσεων;

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (ΕΜ 111)

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 1}}$

α)



δηλ. σημείο τομής στο $(u,v)=(-2,1)$

β)

$$\left.\begin{array}{l} u-v=-3 \\ Au+3v=1 \end{array}\right\} \text{ παράλληλες όταν } \frac{A}{1}=\frac{3}{-1} \Leftrightarrow A=-3$$

άρα: $\left\{\begin{array}{l} u-v=-3 \\ -3u+3v=1 \end{array}\right\}$

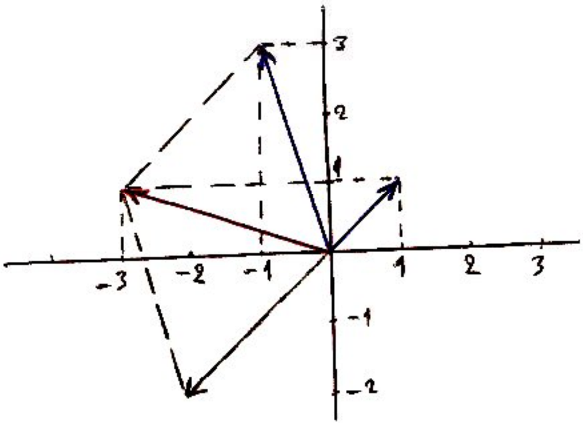
γ)

$$\left.\begin{array}{l} u-v=-3 \\ -3u+3v=\Gamma \end{array}\right\} \text{ συμπίπτουν όταν } \frac{\Gamma}{-3}=\frac{-3}{1} \Leftrightarrow \Gamma=9$$

άρα: $\left\{\begin{array}{l} u-v=-3 \\ -3u+3v=9 \end{array}\right\}$

δ)

$$\left.\begin{array}{l} u-v=-3 \\ u+3v=1 \end{array}\right\} \longrightarrow u\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+v\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}$$



ΑΣΚΗΣΗ 2

Κάθε σύστημα μπορεί να γραφεί ως:

$E_1: A_1 u + B_1 v + \Gamma_1 w = \Delta_1$
$E_2: A_2 u + B_2 u + \Gamma_2 w = \Delta_2$
$E_3: A_3 u + B_3 u + \Gamma_3 w = \Delta_3$

α) $A_2 u + B_2 u + \Gamma_2 w = 2\left(A_1 u + B_1 v + \Gamma_1 w\right)$

και $\Delta_2 \neq 2\Delta_1$

Άρα, $E_1 // E_2$ και διαφορετικά ~~μετα~~ξύ τους

$$\frac{A_3}{A_2} = \frac{-2}{4} \neq \frac{B_3}{B_2} = \frac{7}{2}$$

οπότε το E_3 τέμνει τα παράλληλα E_1 & E_2 σε 2 παράλληλες ευθείες, οπότε δεν υπάρχει λύση στο σύστημα

β) $A_3 u + B_3 v + \Gamma_3 w = A_1 u + B_1 v + \Gamma_1 w + 1\left(A_2 u + B_2 v + \Gamma_2 w\right)$

και $\Delta_3 \neq \Delta_1 + 1\Delta_2$

Άρα, τα E_1, E_2, E_3 τέμνονται ανά δύο σε 3 παράλληλες ευθείες, οπότε δεν υπάρχει λύση στο σύστημα γ) $A_3 u + B_3 v + \Gamma_3 w = A_1 u + B_1 v + \Gamma_1 w + 1(A_2 u + B_2 v + \Gamma_2 w)$

και $\Delta_3 = \Delta_1 + 1\Delta_2$

Άρα, τα E_1, E_2, E_3 τέμνονται σε μια κοινή ευθεία, οπότε το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων

ΑΣΚΗΣΗ 3

$$\left.\begin{aligned} u + v + w &= b_1 \\ u + 2v + 3w &= b_2 \\ v + 2w &= b_3 \end{aligned}\right\} \longrightarrow u\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + v\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} + w\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

Τα 3 διανύσματα στην αριστερή πλευρά είναι συνεπίπεδα αν $\exists\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} = \alpha_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \left\{\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 &= 3 \\ \alpha_2 &= 2 \end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} \alpha_2 &= 2 \\ \alpha_1 &= 1 - \alpha_2 = -1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 &= 3 \end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= -1 \\ \alpha_2 &= 2 \end{aligned}\right.$$

Άρα: $\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ και τα 3 διανύσματα είναι συνεπίπεδα

Το σύστημα έχει λύση όταν και το διάνυσμα (b_1, b_2, b_3) βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο, δηλ. όταν $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1 + c_2\\c_1 + 2c_2\\c_2\end{bmatrix}$$

Π.Χ. για $c_1=1$ και $c_2=-3$ έχουμε: $(b_1, b_2, b_3) = (-2, -5, -3)$

Η λύση για δεδομένο συνεπίπεδο (b_1, b_2, b_3) δεν είναι μοναδική, γιατί τα 3 διανύσματα στην αριστερή πλευρά δεν αποτελούν τμήματα ακμών παραλληλεπιπέδου

ΑΣΚΗΣΗ 4

$E_1: u + v + w = b_1$

$E_2: u + 2v + 3w = b_2$

$E_3: \quad v + 2w = b_3$

διάνυσμα κάθετο στο E_1: $\lambda(1,1,1)$ με $\lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$

» » » E_2: $\mu(1,2,3)$ με $\mu \neq 0, \mu \in \mathbb{R}$

» » » E_3: $\kappa(0,1,2)$ με $\kappa \neq 0, \kappa \in \mathbb{R}$

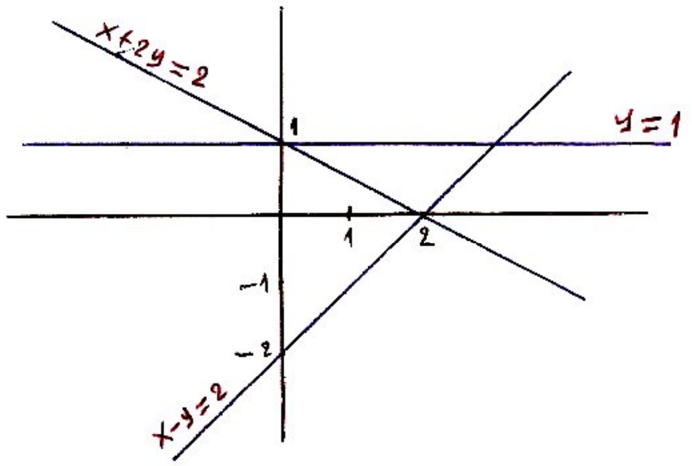
Για το E_1 έχουμε: $(b_1, 0, 0)$, $(0, b_1, 0)$, $(0, 0, b_1)$

Για το E_2 έχουμε: $(b_2, 0, 0)$, $\left(0, \frac{b_2}{2}, 0\right)$, $\left(0, 0, \frac{b_2}{3}\right)$

Για το E_3 έχουμε: παράλληλο στον Ou, $(0, b_3, 0)$, $\left(0, 0, \frac{b_3}{2}\right)$

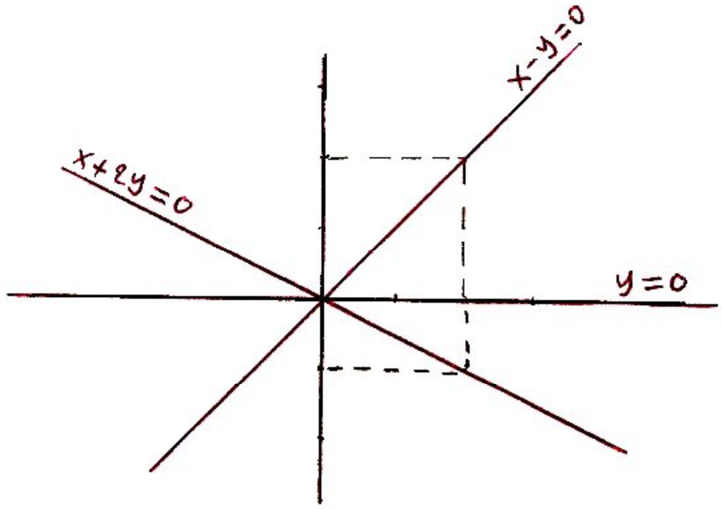
ΑΣΚΗΣΗ 5

α)



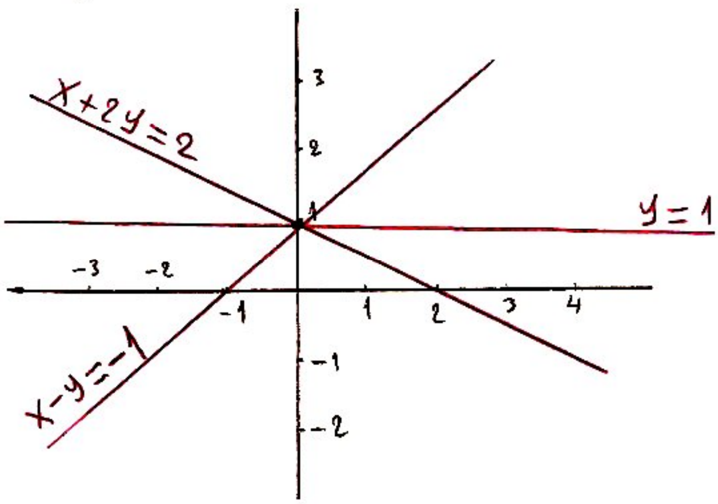
Οι 3 εξισώσεις δεν μπορούν να λυθούν ταυτόχρονα

β)



Υπάρχει μοναδική λύση στο $(x,y)=(0,0)$

γ) Υπάρχει. Π.Χ. μπορεί να μετακινηθεί η 2η ευθεία στο αρχικό σύστημα παράλληλα έτσι ώστε να περνά από το $(0,1)$



$$
\begin{aligned}
x+2y &= 2\\
x-y &= -1\\
y &= 1
\end{aligned}
$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=1 \\ t=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+y=1 \\ t=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=1-x \\ t=0 \\ z=0 \end{array}\right.$$

δηλ. Τα ζητούμενα σημεία θα έχουν τη μορφή:

$(x, 1-x, 0, 0)$ και δύο από αυτά είναι τα

$(2, -1, 0, 0)$ και $(-3, 4, 0, 0)$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Ολόκληρη ευθεία λύσεων υπάρχει όταν οι δύο ευθείες συμπίπτουν δηλ. όταν $\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = \pm 2$