ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ -ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θέματα εξέτασης στο μάθημα «Γραμμική Άλγεβρα & Αναλυτική Γεωμετρία» (ΕΜ111)

Ηράκλειο, 02 Σεπτεμβρίου 2009

Θέμα 1. (μονάδες 1.5)

α) [*μονάδες: 1.0*]. Δείξτε ότι υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα $A=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ και υπολογίστε τον.

β) [*μονάδες: 0.5*]. Έστω ένας πραγματικός τετραγωνικός πίνακας $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τέτοιος ώστε $B^2 = -I$. Υπολογίστε την ορίζουσα του B.

Θέμα 2. (μονάδες 3)

Έστω οι πραγματικοί διανυσματικοί υπόχωροι $V=\{(x,y,z) \setminus x-2y+z=0,\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$ και $W=\langle(0,1,2)\rangle$ του $\mathbb{R}^3$.

α) [*μονάδες: 0.3*]. Τι παριστάνουν γεωμετρικά οι χώροι V και W;
β) [*μονάδες: 0.8*]. Βρείτε βάσεις των V και W
γ) [*μονάδες: 0.8*]. Δείξτε ότι $V\cap W=W$. Τι σημαίνει αυτό γεωμετρικά;
δ) [*μονάδες: 0.3*]. Βρείτε τη διάσταση του αθροίσματος $V+W$.
ε) [*μονάδες: 0.8*]. Βρείτε μια βάση του υποχώρου του $\mathbb{R}^3$ που είναι συμπληρωματικός του V.

Θέμα 3. (μονάδες 3)

Έστω $f_a:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση (μετασχηματισμός) που ορίζεται από τη σχέση: $f_a(\vec{x})=A_a\vec{x}$, όπου

$$A_a=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2a+1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 1+a & -1 & a^2+4a+1 \end{bmatrix},$$

α) [*μονάδες: 1.3*]. Να βρεθεί μια βάση του πυρήνα της f_a για κάθε τιμή της παραμέτρου $a\in\mathbb{R}$
β) [*μονάδες: 0.3*]. Για ποιες τιμές της παραμέτρου $a\in\mathbb{R}$ η απεικόνιση είναι "1-1" και "επί";
γ) [*μονάδες: 0.6*]. Να βρεθεί μια βάση της εικόνας του f_3
δ) [*μονάδες: 0.8*]. Να βρεθούν όλα τα διανύσματα $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$ για τα οποία $f_3(\vec{x})=\vec{e}_2+\vec{e}_3$

Θέμα 4. (μονάδες 2.5)

Έστω ο πίνακας $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$ με $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

α) [*μονάδες: 0.8*]. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A.
β) [*μονάδες: 1.2*]. Δείξτε ότι ο A διαγωνιοποιείται και βρείτε ένα πίνακα P που τον διαγωνιοποιεί, καθώς και τον αντίστοιχο διαγώνιο D.
γ) [*μονάδες: 0.5*]. Αν ο A είναι ο πίνακας μιας απεικόνισης $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, τότε ποιος είναι ο πίνακας της απεικόνισης φ^{80} (δηλαδή της σύνθεσης της φ με τον εαυτό της 80 φορές). Περιγράψτε ένα τρόπο υπολογισμού αυτού του πίνακα χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του ερωτήματος β. (*Σημείωση:* μην τον υπολογίσετε, απλά περιγράψτε).

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ & ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (ΤΕΜ-111)
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2009

ΘΕΜΑ 1

α) $$\det A = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8+4 = 12 \neq 0$$

Άρα $\det A \neq 0$ και επομένως ο A είναι αντιστρέψιμος.

Για να υπολογίσουμε τον A^{-1}, εφαρμόζουμε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{εναλλαγή} \\ \text{γραμμών} \\ \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-2) \\ \\ (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ 1 \\ (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{ll} & (+) \\ (+) & \\ (-1/3) & (1/3) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -2 & 0 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot 1/2 \\ \cdot(-1/2) \\ \cdot(1/3) \end{array} \longrightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

Άρα: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ -1/3 & -1/3 & 1/6 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

β) $B^2 = -I \Rightarrow \det(B^2) = \det(-I) \Rightarrow (\det B)(\det B) = \det[(-1)I] \Rightarrow$

$\Rightarrow (\det B)^2 = (-1)^n \det I \Rightarrow (\det B)^2 = (-1)^n$

Αν <u>n είναι άρτιος</u> τότε $(-1)^n = 1$, και άρα $(\det B)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\det B = \pm 1}$

Αν n είναι περιττός τότε $(-1)^n = -1$, το οποίο δίνει

$(\det B)^2 = -1$ το οποίο είναι <u>άτοπο</u> για πραγματικό πίνακα

ΘΕΜΑ 2

α) Ο χώρος V είναι <u>το επίπεδο</u> του $\mathbb{R}^3$ με εξίσωση $x-2y+z=0$, δηλ. το επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία $y=\frac{1}{2}x$ του επιπέδου Oxy και την ευθεία $z=-x$ του επιπέδου Oxz.
Ο W είναι <u>η ευθεία</u> στη διεύθυνση του διανύσματος $(0,1,2)$ που περνά από την αρχή των αξόνων.

β) $\forall\ \vec{v} = (x,y,z) \in V$, έχουμε:

$\vec{v} = (x,y,z) = (2y-z, y, z) = y(2,1,0) + z(-1,0,1)$

με $y, z \in \mathbb{R}$.

Άρα $V = \langle (2,1,0), (-1,0,1) \rangle$

Επιπλέον, επειδή ο V παριστάνει επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$, έχουμε $\dim V = 2$

Επομένως, τα $(2,1,0)$, $(-1,0,1)$ αποτελούν βάση του V.

Επίσης, το μη-μηδενικό διάνυσμα $(0,1,2)$ που παράγει το W είναι γρ. ανεξάρτητο (όπως κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα μόνο του) και άρα $\{\text{βάση του } W\} = \{(0,1,2)\}$

γ) $V \cap W = W$ σημαίνει ότι $W \subset V$. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι το $(0,1,2)$ ανήκει στο V, δηλ. ότι τα διανύσματα: $(0,1,2)$, $(2,1,0)$, $(-1,0,1)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα

Έστω: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ με στήλες αυτά τα διανύσματα

Αρκεί να δείξουμε ότι $\dim R(A) \neq 3 \Leftrightarrow \det A = 0$

Έχουμε: $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2-(-2) = 0$

$V \cap W = W$ γεωμετρικά σημαίνει ότι η ευθεία W ανήκει στο επίπεδο V

δ) $\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) =$

$= 2 + 1 - 1 = 2$

ε) Ο V αποτελείται από όλα τα (x,y,z) τα οποία είναι λύσεις της εξίσωσης:

$x - 2y + z = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$

Άρα, ο V είναι ο μηδενόχωρος του πίνακα $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ δηλ. $V = N(B)$. Επομένως ο συμπληρωματικός του V υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ είναι ο χώρος γραμμών $R(B^T)$ δηλ. ο χώρος που παράγεται από το $(1,-2,1)$, το οποίο αποτελεί και βάση του.

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ 3}}$

α) Μετατρέπω τον A_α σε κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2\alpha+1 \\ 1 & \alpha-1 & 1 \\ 1+\alpha & -1 & \alpha^2+4\alpha+1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2\alpha+1 \\ 0 & \alpha & -2\alpha \\ 0 & \alpha & -\alpha^2+\alpha \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2\alpha+1 \\ 0 & \alpha & -2\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha^2+3\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2\alpha+1 \\ 0 & \alpha & -2\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha(\alpha-3) \end{bmatrix} = U_\alpha$$

$r(A_\alpha) = \{$πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U_\alpha\}$ $\Rightarrow r(A_\alpha) = \begin{cases} 3, & \text{για } \alpha\in\mathbb{R}-\{0,3\} \\ 2, & \text{για } \alpha=3 \\ 1, & \text{για } \alpha=0 \end{cases}$

Άρα, $\dim(\ker f_\alpha) = n - r(A_\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{για } \alpha\in\mathbb{R}-\{0,3\} \\ 1, & \text{για } \alpha=3 \\ 2, & \text{για } \alpha=0 \end{cases}$

Επομένως, αν $\alpha\in\mathbb{R}-\{0,3\}$ έχουμε $\ker f_\alpha = \{\vec{0}\}$ και ο πυρήνας της απεικόνισης δεν έχει βάση

Για $\alpha=3$ έχουμε: $A_3\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow U_3\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+7z=0 \\ 3y-6z=0 \Leftrightarrow y=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5z \\ y=2z \end{cases}$$

Άρα: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5z \\ 2z \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z\in\mathbb{R}$

δηλ. $\{\text{μια βάση του } \ker f_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Για $\alpha=0$ έχουμε: $A_0 \vec{x} \Leftrightarrow U_0 \vec{x} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-y+z=0 \Leftrightarrow x=y-z$

Άρα: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y-z \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y,z \in \mathbb{R}$

δηλ. $\{\text{μια βάση του } \ker f_0\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

β) Η f_α είναι "1-1" και "επί" ανν $m=n=r(A_\alpha)$, δηλ. όταν $r(A_\alpha)=3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}-\{0,3\}$

γ) $U_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, και άρα έχουμε:

$\{\text{μια βάση του } \mathrm{Im} f_3\} = \{$στήλες του A_3 που αντιστοιχούν στις στήλες του U_3 με οδηγούς$\} = \{1^\text{η}, 2^\text{η}$ στήλη του $A_3\} =$

$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

δ) $f_3(\vec{x}) = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \Leftrightarrow A_3 \vec{x} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \Leftrightarrow U_3 \vec{x} = \vec{b}$

όπου $\vec{b}$ το διάνυσμα που προκύπτει εφαρμόζοντας στο διάνυσμα $\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ τα ίδια στάδια απαλοιφής που χρησιμοποιήσαμε για να "πάμε" από τον A_3 στον U_3. Άρα, έχουμε:

$$\vec{e}_2+\vec{e}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\begin{array}{l}(-1)\quad(-4)\\ \leftarrow(+)\\ \leftarrow(+)\end{array}\longrightarrow\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\begin{array}{l}(-1)\\ \leftarrow(+)\end{array}\longrightarrow\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\vec{b}$$

Άρα, $U_3\vec{x}=\vec{b}\iff\begin{bmatrix}1&-1&7\\0&3&-6\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\iff$

$$\iff\begin{cases}x-y+7z=0\\3y-6z=1\iff y=2z+\frac{1}{3}\end{cases}\iff\begin{cases}x=-5z+1/3\\y=2z+\frac{1}{3}\end{cases}$$

Άρα: $\vec{x}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5z+1/3\\2z+1/3\\z\end{bmatrix}=z\begin{bmatrix}-5\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/3\\1/3\\0\end{bmatrix}$, $z\in\mathbb{R}$

ΘΕΜΑ 4

α) $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}3-\lambda&2&4\\2&-\lambda&2\\4&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\left[-\lambda(3-\lambda)-4\right]-2\left[2(3-\lambda)-8\right]+$

$+4(4+4\lambda)=(3-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-4)-2(-2\lambda-2)+16(\lambda+1)=$

$=(3-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-4)+20(\lambda+1)=(\lambda+1)\left[(3-\lambda)(\lambda-4)+20\right]=$

$=(\lambda+1)(-\lambda^2+7\lambda+8)=-(\lambda+1)^2(\lambda-8)$

Άρα: $\det(A-\lambda I)=0\iff-(\lambda+1)^2(\lambda-8)=0\iff\begin{cases}\lambda=-1 \text{ (διπλή)}\\ \text{ή}\\ \lambda=8\end{cases}$

Επομένως, οι ιδιοτιμές του A είναι: $\lambda_1=-1$ (διπλή) και $\lambda_2=8$

β) Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$ έχουμε:

$$A-\lambda_1 I=A+I=\begin{bmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{bmatrix}\begin{array}{l}(-1/2)\quad(-1)\\ \leftarrow(+)\\ \leftarrow(+)\end{array}\longrightarrow\begin{bmatrix}4&2&4\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Άρα: $(A-\lambda_1 I)\vec{x}=\vec{0} \iff 4x+2y+4z=0 \iff x=-\frac{1}{2}y-z$

δηλ. $\vec{x}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}y-z\\ y\\ z\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}-1/2\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$, $y,z\in\mathbb{R}$

Επομένως: $\{$μια βάση του $V_{-1}(A)=N(A-\lambda_1 I)\}=\left\{\begin{bmatrix}-1/2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}=\mathbb{B}_{-1}$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2=8$ έχουμε:

$$A-\lambda_2 I=A-8I=\begin{bmatrix}-5&2&4\\2&-8&2\\4&2&-5\end{bmatrix}\begin{matrix}(2/5)\ (4/5)\\ \leftarrow(+)\\ \leftarrow\end{matrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}-5&2&4\\0&-36/5&18/5\\0&18/5&-9/5\end{bmatrix}\begin{matrix}\\(1/2)\\ \leftarrow(+)\end{matrix}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}-5&2&4\\0&-36/5&18/5\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Άρα: $(A-\lambda_2 I)\vec{x}=\vec{0}\iff\left\{\begin{array}{l}-5x+2y+4z=0\\ -\frac{36}{5}y+\frac{18}{5}z=0\iff y=\frac{1}{2}z\end{array}\right\}\iff\left\{\begin{array}{l}x=z\\ y=\frac{1}{2}z\end{array}\right.$

δηλ. $\vec{x}=\begin{bmatrix}z\\(1/2)z\\z\end{bmatrix}=z\begin{bmatrix}1\\1/2\\1\end{bmatrix}$, $z\in\mathbb{R}$

Επομένως: $\{$μια βάση του $V_8(A)=N(A-\lambda_2 I)\}=\left\{\begin{bmatrix}1\\1/2\\1\end{bmatrix}\right\}=\mathbb{B}_8$

Έστω $\mathbb{B}=\mathbb{B}_{-1}\cup\mathbb{B}_8=\left\{\begin{bmatrix}-1/2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1/2\\1\end{bmatrix}\right\}$

Το $\mathbb{B}$ έχει 3 διανύσματα, και άρα ο A έχει 3 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, το οποίο επειδή $3=n$ συνεπάγεται ότι ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Ο πίνακας $P=\begin{bmatrix}-1/2&-1&1\\1&0&1/2\\0&1&1\end{bmatrix}$ (με στήλες τα διανύσματα του $\mathbb{B}$)

διαγωνιοποιεί τον A και $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ είναι ο διαγώνιος που

είναι όμοιος με τον A μέσω της σχέσης $A = PDP^{-1}$

γ) Ο πίνακας της φ^{80} είναι ο A^{80}, ο οποίος μπορεί να υπολογιστεί ως εξής: $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^{80} = PD^{80}P^{-1}$ (*)

όπου $D^{80} = \begin{bmatrix} (-1)^{80} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{80} & 0 \\ 0 & 0 & 8^{80} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8^{80} \end{bmatrix}$

Επομένως, για να βρούμε τον A^{80}, αρκεί να υπολογίσουμε τον P^{-1} (π.χ. με Gauss-Jordan) και να εκτελέσουμε τον πολλ/σμό των τριών πινάκων στο δεξί μέλος της (*).