ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ -ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θέματα εξέτασης στο μάθημα «Γραμμική Άλγεβρα Ι» (ΕΜ111)

Ηράκλειο, 02 Σεπτεμβρίου 2007

Θέμα 1. (μονάδες 3)

Έστω το σύστημα $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 19x_4 = 38 \\ \quad 3x_2 + 4x_3 + 15x_4 = 27 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 6x_4 = 14 \end{cases}$, με αγνώστους $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

α) [*μονάδες: 1.0*]. Γράψτε το παραπάνω σύστημα εξισώσεων στη μορφή $Ax = b$ και εφαρμόστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss για να το λύσετε.

β) [*μονάδες: 1.0*]. Δείξτε ότι υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ και υπολογίστε τον.

γ) [*μονάδες: 1.0*] Βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το ακόλουθο σύστημα έχει μη-μηδενικές λύσεις.

$$\begin{cases} (\lambda + 4)x_1 + (\lambda - 2)x_2 = 0 \\ 4x_1 + (\lambda - 3)x_2 = 0 \end{cases}$$

Βρείτε τις λύσεις του συστήματος για κάθε τιμή του λ.

Θέμα 2. (μονάδες 2.5)

Έστω οι πραγματικοί διανυσματικοί υπόχωροι $V = \{(x, y, z) \setminus x = y,\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$ και $W = \{(x, y, z) \setminus 3x + y + 2z = 0,\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$ του $\mathbb{R}^3$.

α) [*μονάδες: 0.3*]. Τι παριστάνουν γεωμετρικά τα *V* και *W*;

β) [*μονάδες: 0.8*]. Βρείτε βάσεις των *V* και *W*.

γ) [*μονάδες: 0.7*]. Βρείτε μια βάση του υποχώρου $V \cap W$ και τη διάσταση του αθροίσματος $V + W$.

δ) [*μονάδες: 0.7*]. Βρείτε μια βάση του υποχώρου του $\mathbb{R}^3$ που είναι συμπληρωματικός του $V \cap W$.

Θέμα 3. (μονάδες 3)

Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ και $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ οι γραμμικές απεικονίσεις που ορίζονται από τις σχέσεις:

$$f(x, y, z) = (x - y,\ 2y - z) \text{ και } g(x, y) = (x + y,\ 3x - y,\ x,\ -2y).$$

α) [*μονάδες: 0.6*] Υπολογίστε τους πίνακες των απεικονίσεων αυτών

β) [*μονάδες: 0.7*] Υπολογίστε τον πίνακα *A* της σύνθεσης τους *h*.

γ) [*μονάδες: 1.2*] Να βρεθούν οι διαστάσεις και βάσεις των $\ker h$ και $\operatorname{Im} h$.

γ) [*μονάδες: 0.25*] Είναι η απεικόνιση *h* “επί”;

δ) [*μονάδες: 0.25*] Είναι η απεικόνιση *h* “1-1”;

Θέμα 4. (μονάδες 2.5)

α) [*μονάδες: 0.5*] Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Να βρεθούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(\lambda)$ και οι ιδιοτιμές του *A*.

β) [*μονάδες: 0.8*] Δείξτε ότι ο *A* διαγωνιοποιείται και βρείτε ένα πίνακα *P* που τον διαγωνιοποιεί, καθώς και τον αντίστοιχο διαγώνιο *D*.

γ) [*μονάδες: 0.7*] Υπολογίστε τον A^{90} χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του ερωτήματος β.

δ) [*μονάδες: 0.5*] Ποια είναι η τιμή της ορίζουσας του πίνακα $B = PA^{50}P^{-1}$;

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (ΕΜ 111)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2007

ΘΕΜΑ 1

α)
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 6 & 19 \\ 0 & 3 & 4 & 15 \\ 1 & -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 13 \\ 38 \\ 27 \\ 14 \end{bmatrix}}_{b}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 6 & 13 \\ 2 & 2 & 6 & 19 & 38 \\ 0 & 3 & 4 & 15 & 27 \\ 1 & -1 & -1 & 6 & 14 \end{array}\right] \begin{array}{cc} 1 & 1/2 \\ (-) & \\ & \\ & (-) \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 6 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & 13 & 25 \\ 0 & 3 & 4 & 15 & 27 \\ 0 & -3/2 & -2 & 3 & 15/2 \end{array}\right] \begin{array}{cc} & \\ 3 & (-3/2) \\ (-) & \\ & (-) \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 6 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & 13 & 25 \\ 0 & 0 & -8 & -24 & -48 \\ 0 & 0 & 4 & 45/2 & 45 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ (-1/2) \\ (-) \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 6 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & 13 & 25 \\ 0 & 0 & -8 & -24 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 21/2 & 21 \end{array}\right]$$

Ανάδρομη Αντικατάσταση:

$$\frac{21}{2} x_4 = 21 \Leftrightarrow x_4 = 2$$

$$-8x_3 - 24x_4 = -48 \Rightarrow x_3 = 0$$

$x_2 + 4x_3 + 13x_4 = 25 \Rightarrow x_2 + 26 = 25 \Leftrightarrow x_2 = -1$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 13 \Rightarrow 2x_1 - 1 + 12 = 13 \Leftrightarrow x_1 = 1$

Επομένως, το σύστημα έχει τη μοναδική λύση:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -1, 0, 2)$$

β) $$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(4+4) - 3(-2-2) = -8 + 12 = 4 \neq 0$$

Επομένως, $\det B \neq 0$ και άρα ο B είναι αντιστρέψιμος

Για να υπολογίσουμε τον B^{-1} εφαρμόζουμε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -4 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot(-1/4) \\ \cdot(-1) \end{array} \longrightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Άρα: $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

γ) Το σύστημα έχει μη-μηδενικές λύσεις αν και μόνο αν $\det A = 0$

όπου $A = \begin{bmatrix} \lambda+4 & \lambda-2 \\ 4 & \lambda-3 \end{bmatrix}$.

Άρα: $\det A = 0 \Leftrightarrow (\lambda+4)(\lambda-3) - 4(\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 4 \\ \text{ή} \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Για $\lambda = 4$ έχουμε:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 8 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} 1/2 \\ (-) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow 8X_1 + 2X_2 = 0 \Leftrightarrow X_1 = -\frac{1}{4} X_2$$

Άρα: $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = X_2 \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_2 \in \mathbb{R}$

Για $\lambda = -1$ έχουμε:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} 4/3 \\ (-) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow 3X_1 - 3X_2 = 0 \Leftrightarrow X_1 = X_2$$

Άρα: $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = X_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_2 \in \mathbb{R}$

ΘΕΜΑ 2

α) Ο V είναι το <u>επίπεδο</u> στο χώρο $\mathbb{R}^3$ με εξίσωση: $x-y=0$, δηλαδή, το επίπεδο που ορίζεται από τον άξονα Oz και την ευθεία $y=x$ του επιπέδου Oxy.

Ο W είναι το <u>επίπεδο</u> στο χώρο $\mathbb{R}^3$ με εξίσωση: $3x+y+2z=0$, δηλαδή, το επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία $3x+y=0$ του επιπέδου Oxy και την ευθεία $3x+2z=0$ του επιπέδου Oxz.

β) $\forall\ (x,y,z)\in V$, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{με } x,z\in\mathbb{R}$$

δηλ. $V=\langle (1,1,0),\ (0,0,1)\rangle$

Επιπλέον, $\nexists\ \lambda\in\mathbb{R}$ τ.ω. $(1,1,0)=\lambda(0,0,1)$, δηλαδή τα διανύσματα $(1,1,0)$, $(0,0,1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, και επειδή παράγουν τον V θα αποτελούν βάση του. Άρα:

$\{\text{μια βάση του } V\} = \{(1,1,0),(0,0,1)\}$

Ομοίως, $\forall\ (x,y,z)\in W$ έχουμε: $(x,y,z)=\left(x,y,-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y\right)=$

$= x\left(1,0,-\frac{3}{2}\right) + y\left(0,1,-\frac{1}{2}\right)$

Άρα: $W=\left\langle \left(1,0,-\frac{3}{2}\right), \left(0,1,-\frac{1}{2}\right)\right\rangle$

Επιπλέον, $\nexists\ \lambda\in\mathbb{R}$ τ.ω. $(1,0,-3/2)=\lambda(0,1,-1/2)$. Άρα, τα $(1,0,-3/2)$, $(0,1,-1/2)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, και επειδή παράγουν τον W θα αποτελούν βάση του. Δηλαδή:

$\{\text{μια βάση του } W\} = \{(1, 0, -\frac{3}{2}), (0, 1, -1/2)\}$

γ) $V \cap W = \{(x, y, z) \setminus x = y$ και $3x + y + 2z = 0$, με $x, y, z \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow V \cap W = \{(x, x, z) \setminus 4x + 2z = 0,\ x, z \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow V \cap W = \{(x, x, z) \setminus z = -2x,\ x, z \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow V \cap W = \{(x, x, -2x) \setminus x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow V \cap W = \langle (1, 1, -2) \rangle$

Άρα, μια βάση του $V \cap W$ είναι το μονοσύνολο $\{(1, 1, -2)\}$.

Επίσης, $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) =$

$= 2 + 2 - 1 = 3$

δ) Έστω ο πίνακας $A = [1, 1, -2]$ δηλ. $V \cap W = R(A^T)$. Τότε ο συμπληρωματικός του $V \cap W$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ είναι ο μηδενόχωρος $N(A)$. Έχουμε:

$$[1, 1, -2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2x_3 - x_2$$

δηλ. $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 - x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ με $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

Άρα, $\{\text{μια βάση του } N(A)\} = \{(-1, 1, 0), (2, 0, 1)\}$

ΘΕΜΑ 3

α) Ο πίνακας της f ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$ έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των $f(1,0,0)$, $f(0,1,0)$ και $f(0,0,1)$. Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} f(1,0,0)&=(1,0)\\ f(0,1,0)&=(-1,2)\\ f(0,0,1)&=(0,-1)\end{aligned}\right\} \Rightarrow B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

Ομοίως, ο πίνακας της g ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^4$ έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των $g(1,0)$ και $g(0,1)$. Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} g(1,0)&=(1,3,1,0)\\ g(0,1)&=(1,-1,0,-2)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \Gamma=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

β) Εφόσον $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ και $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$, η σύνθεση h είναι $h=g\circ f$ με $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ και πίνακα $A=\Gamma B$ ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^4$. Άρα:

$$A=\Gamma B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & -5 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & -4 & 2\end{bmatrix}$$

γ) $$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & -5 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & -4 & 2\end{bmatrix}\begin{array}{l} 3 \quad 1\\ \leftarrow (-)\\ \leftarrow (-)\\ \\ \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -8 & 4\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & -4 & 2\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ 1/4 \quad 1/2\\ \leftarrow (-)\\ \leftarrow (-)\end{array} \longrightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

$\dim(\mathrm{Im}\,h) = \dim R(A) = r(A) = [\text{πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του } U] = 2$

$\dim(\ker h) = \dim N(A) = n - r(A) = 3 - 2 = 1$

$\{\text{μια βάση του } \mathrm{Im}\,h\} = \{\text{μια βάση του } R(A)\} =$

$= \{\text{στήλες του } A \text{ που αντιστοιχούν στις στήλες του } U \text{ με οδηγούς}\} =$

$= \{1\text{η}, 2\text{η} \text{ στήλη του } A\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$

Επίσης, $AX = 0 \Leftrightarrow UX = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} -8x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_2 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_1 = \frac{1}{2}x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

$\{\text{μια βάση του } \ker h\} = \{\text{μια βάση του } N(A)\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

γ) $r(A) = 2 < m = 4$ άρα η h δεν είναι "επί"
(ή αλλιώς $\dim(\mathrm{Im}\,h) = 2 < \dim \mathbb{R}^4 = 4$)

δ) $r(A) = 2 < n = 3$ άρα η h δεν είναι "1-1"
(ή αλλιώς $\ker h \neq \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$)

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ 4}}$

α) $X_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)-2 =$

$= \lambda^2 - 5\lambda + 4$ (χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A)

$X_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda^2-5\lambda+4=0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{5\pm 3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda=4 \\ \lambda=1 \end{array} \right\}$ ιδιοτιμές του A

β) Ο πίνακας A είναι 2×2 και έχει 2 διαφορετικές ιδιοτιμές, και άρα διαγωνιοποιείται.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=4$ έχουμε:

$(A-\lambda_1 I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -X_1 - 2X_2 = 0 \Leftrightarrow X_1 = -2X_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2X_2 \\ X_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = X_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_2 \in \mathbb{R}$

Επομένως: $\{\text{μια βάση του } V_4(A)\} = \mathbb{B}_4 = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2=1$ έχουμε:

$(A-\lambda_2 I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -X_1 + X_2 = 0 \Leftrightarrow X_1 = X_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = X_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_2 \in \mathbb{R}$

Επομένως: $\{\text{μια βάση του } V_1(A)\} = \mathbb{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Ο πίνακας $P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (με στήλες τα διανύσματα του συνόλου $\mathbb{B} = \mathbb{B}_4 \cup \mathbb{B}_1$) διαγωνιοποιεί τον A, και $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι ο αντίστοιχος διαγώνιος που είναι όμοιος με τον A μέσω της σχέσης

$D = P^{-1} A P$

γ) $P^{-1} = \dfrac{1}{\det P} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{-3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$

$$A^{90} = P D^{90} P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^{90} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \cdot 4^{90} & 1 \\ 4^{90} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+2\cdot 4^{90}}{3} & \frac{2}{3}(1-4^{90}) \\ \frac{1-4^{90}}{3} & \frac{2+4^{90}}{3} \end{bmatrix}$$

δ) $\det B = (\det A)^{50} = 4^{50}$