ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ -ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θέματα εξέτασης προόδου στο μάθημα «Γραμμική Άλγεβρα & Αναλυτική Γεωμετρία» (ΕΜ111)

Ηράκλειο, 22 Νοεμβρίου 2008

Θέμα 1. (μονάδες 2.7)

Έστω το σύστημα εξισώσεων: $\left.\begin{array}{l} \lambda v + w = -3 \\ 2u + 2v - 4w = -1 \\ u - 3v + 2w = \mu \end{array}\right\}$, με αγνώστους $u, v, w \in \mathbb{R}$ και με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ γνωστές παραμέτρους.

α) [*μονάδες: 0.7*] Για ποιες τιμές των λ, μ το σύστημα δεν έχει λύση;

β) [*μονάδες: 1.0*] Για ποιες τιμές των λ, μ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις; Ποια η γενική μορφή αυτών των λύσεων;

γ) [*μονάδες: 1.0*] Για ποιες τιμές των λ, μ το σύστημα έχει μοναδική λύση; Υπολογίστε την, διαλέγοντας μόνοι σας δύο τέτοιες τιμές για τα λ, μ .

Θέμα 2. (μονάδες 1.8)

α) [*μονάδες: 1.2*] Χρησιμοποιήστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss-Jordan για να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

β) [*μονάδες: 0.6*] Βρείτε τη λύση του συστήματος $A\vec{x} = \vec{b}$, όπου $\vec{b} = (-1, 0, 2)$.

Θέμα 3. (μονάδες 1.7)

Έστω το σύνολο $V = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ , \text{ με } \ x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \right\}$.

α) [*μονάδες: 0.7*] Δείξτε ότι το *V* είναι πραγματικός διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$.

β) [*μονάδες: 1.0*] Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του *V*.

Θέμα 4. (μονάδες 3.8)

Έστω ο πίνακας: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 7 \\ -5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$.

α) [*μονάδες: 0.9*]. Βρείτε την παραγοντοποίηση LU σε κάτω τριγωνικό πίνακα *L* (με 1 σε όλη την κύρια διαγώνιο) και σε πίνακα *U* με κλιμακωτή μορφή, και προσδιορίστε την τάξη του *A*.

β) [*μονάδες: 0.4*]. Βρείτε τη διάσταση και μια βάση του χώρου στηλών του *A*.

γ) [*μονάδες: 0.4*]. Βρείτε τη διάσταση και μια βάση του χώρου γραμμών του *A*.

δ) [*μονάδες: 0.4*]. Προσδιορίστε τις βασικές και τις ελεύθερες μεταβλητές του συστήματος $A\vec{x} = \vec{0}$.

ε) [*μονάδες: 0.4*]. Βρείτε τη διάσταση και μια βάση του μηδενοχώρου του *A*.

στ) [*μονάδες: 0.6*]. Βρείτε τη διάσταση και μια βάση του αριστερού μηδενοχώρου του *A*.

ζ) [*μονάδες: 0.7*]. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{b}$, έτσι ώστε το μη-ομογενές σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ να έχει λύση. Είναι αυτή η λύση μοναδική;

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ & ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ (ΝΟΕ 2008)

ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΘΕΜΑ 1

α)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \lambda & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & \mu \end{array}\right] \xrightarrow{\text{εναλλαγή}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & \mu \\ 2 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-2) \\ (+) \\ \\ \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & \mu \\ 0 & 8 & -8 & -2\mu-1 \\ 0 & \lambda & 1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (-\frac{\lambda}{8}) \\ (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & \mu \\ 0 & 8 & -8 & -(2\mu+1) \\ 0 & 0 & \lambda+1 & \frac{(2\mu+1)\lambda}{8}-3 \end{array}\right] \qquad (1)$$

Το σύστημα δεν έχει πλήρες σύνολο μη-μηδενικών οδηγών ανν $\lambda=-1$. Σ' αυτήν την περίπτωση, ο όρος στο δεξί μέλος της τελευταίας εξίσωσης που προκύπτει από την (1), γίνεται: $-\frac{2\mu+1}{8}-3$, ο οποίος μηδενίζεται ανν $\frac{-(2\mu+1)}{8}=3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2\mu+1) = -24 \Leftrightarrow \mu = -\frac{25}{2}$.

Άρα, για $\lambda=-1$ και $\mu \neq -\frac{25}{2}$ η τελευταία εξίσωση είναι:
$0u+0v+0w = \frac{-(2\mu+1)}{8}-3 \ (\neq 0)$ και άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

β) Για $\lambda=-1$ και $\mu=-\frac{25}{2}$ η τελευταία εξίσωση στην (1) γίνεται $0u+0v+0w=0$ που ισχύει $\forall\, u,v,w \in \mathbb{R}$.

Η 2η εξίσωση δίνει: $8v - 8w = 24 \Leftrightarrow v = w+3$

και η 1η εξίσωση: $u - 3v + 2w = -\frac{25}{2} \Leftrightarrow u = 3v - 2w - \frac{25}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow u = 3w + 9 - 2w - \frac{25}{2} \Leftrightarrow u = w - \frac{7}{2}$

Δηλ. το σύστημα θα έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w - \frac{7}{2} \\ w+3 \\ w \end{bmatrix} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = w\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7/2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w \in \mathbb{R}$$

γ) Από το (α) προκύπτει ότι το σύστημα έχει πλήρες σύνολο μη-μηδενικών οδηγών ανν $\lambda \neq -1$. Άρα, για $\lambda \neq -1$ και $\mu \in \mathbb{R}$ το σύστημα έχει μοναδική λύση. Για παράδειγμα, αν πάρουμε $\lambda = 0$ και $\mu = 0$, έχουμε:

3η εξίσωση: $w = -3$

2η εξίσωση: $8v - 8w = -1 \Leftrightarrow 8v = 8w - 1 \Rightarrow 8v = -25 \Leftrightarrow v = -\frac{25}{8}$

1η εξίσωση: $u - 3v + 2w = 0 \Leftrightarrow u = 3v - 2w \Rightarrow u = 3\left(-\frac{25}{8}\right) - 2(-3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u = -\frac{27}{8}$

Δηλ. για $\lambda = \mu = 0$, το σύστημα έχει τη μοναδική λύση:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27/8 \\ -25/8 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ΘΕΜΑ 2

α)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{εναλλαγή} \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-2) \\ \\ (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (-1) \\ \\ \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (+) \\ 1 \quad 4 \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (+) \\ (-1) \\ \\ \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} /1 \\ /2 \\ /1 \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Άρα: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

β) Αφού $\exists A^{-1}$ το σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ έχει τη μοναδική λύση $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$

δηλ. $\vec{x}=\begin{bmatrix}-4 & -5 & 3\\ 0 & -1 & 1/2\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x}=\begin{bmatrix}4+6\\1\\1+2\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x}=\begin{bmatrix}10\\1\\3\end{bmatrix}$

ΘΕΜΑ 3

α) Προφανώς $V \subseteq \mathbb{R}^4$ (αφού περιέχει 4άδες πραγματικών αριθμών)
και $V \neq \emptyset$ (αφού π.χ. το $\vec{0}=(0,0,0,0)$ ανήκει στο V)
Αρκεί να δείξουμε ότι το V είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό με κάθε πραγματικό αριθμό.
Έστω $\vec{v}_1=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ και $\vec{v}_2=(y_1,y_2,y_3,y_4)$ με $\vec{v}_1,\vec{v}_2 \in V$

δηλ. $x_1+4x_2-x_3+2x_4=0$ (1)

και $y_1+4y_2-y_3+2y_4=0$ (2)

Έχουμε: $\vec{v}_1+\vec{v}_2=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3,\ x_4+y_4)$
Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη παίρνουμε:
$(x_1+y_1)+4(x_2+y_2)-(x_3+y_3)+2(x_4+y_4)=0$
και άρα $\vec{v}_1+\vec{v}_2 \in V$, $\forall\ \vec{v}_1,\vec{v}_2 \in V$ (3)
δηλ. το V είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.
Επίσης, έστω $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε $\lambda\vec{v}_1=(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$
Πολλαπλασιάζοντας την (1) με λ, παίρνουμε:
$(\lambda x_1)+4(\lambda x_2)-(\lambda x_3)+2(\lambda x_4)=0$ και άρα:
$\lambda\vec{v}_1 \in V$, $\forall\ \vec{v}_1 \in V$ και $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ (4)

$[(3),(4)] \Rightarrow$ Το V είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$

β) $\forall\ \vec{v}=(x_1,x_2,x_3,x_4) \in V$ έχουμε:

$\vec{v}=(-4x_2+x_3-2x_4,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=x_2(-4,1,0,0)+x_3(1,0,1,0)+$

$+x_4(-2,0,0,1)$, με $x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

Άρα: $V = \left\langle \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ (δηλ. τα $\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ παράγουν τον V)

Επίσης, $\lambda_1 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

Άρα, τα διανύσματα $\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και παράγουν τον V. Άρα, αποτελούν μια βάση του V.

Επομένως, $\dim V = \{\text{πλήθος διανυσμάτων βάσης}\} \Rightarrow \dim V = 3$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ 4}}$

α)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 7 \\ -5 & 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (-2) \quad 1 \quad 5 \\ (+) \\ (+) \\ (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & * & 1 & 0 \\ -5 & * & * & 1 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 10 \\ 0 & 5 & 20 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ 3 \quad 5 \\ (+) \\ (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & * & 1 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (-1) \\ (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \;\Big|\; \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U}$$

$r(A) = [$πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U] \Rightarrow r(A) = 3$

β) $\dim R(A) = r(A) \Rightarrow \dim R(A) = 3$

{Βάση του $R(A)$} = {στήλες του A που αντιστοιχούν στις στήλες του U που έχουν τους οδηγούς} = {1η, 2η, 3η στήλη του A} $= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$

γ) $\dim R(A^T) = r(A) \Rightarrow \dim R(A^T) = 3$

{μια βάση του $R(A^T)$} = {οι μη-μηδενικές γραμμές του U} = {1η, 2η, 3η γραμμή του U} $= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$

δ) $A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$

Βασικές μεταβλητές: x_1, x_2, x_3 (αντιστοιχούν σε στήλες με οδηγούς)
Ελεύθερες μεταβλητές: καμία (αντιστοιχούν σε στήλες χωρίς οδηγούς)

ε) $\dim N(A) = n - r(A) = 3 - 3 = 0$
Άρα $N(A) = \{\vec{0}\} \Rightarrow N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ και ο $N(A)$ δεν έχει βάση.

στ) $\dim N(A^T) = m - r(A) = 4 - 3 = 1$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ -1 & -3 & 4 & 10 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \quad (-3) \\ (+) \\ (+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & 10 & 20 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-5) \\ (+) \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} = U_2$$

$$A^T \vec{y} = \vec{0} \Leftrightarrow U_2 \vec{y} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5y_3 - 5y_4 = 0 \Leftrightarrow y_3 = -y_4 \\ -y_2 + 3y_3 + 5y_4 = 0 \Leftrightarrow y_2 = 3y_3 + 5y_4 \Rightarrow y_2 = -3y_4 + 5y_4 \Rightarrow y_2 = 2y_4 \\ y_1 + 2y_2 - y_3 - 5y_4 = 0 \Leftrightarrow y_1 = -2y_2 + y_3 + 5y_4 \Rightarrow y_1 = -4y_4 - y_4 + 5y_4 \Rightarrow y_1 = 0 \end{cases}$$

Άρα: $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2y_4 \\ -y_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = y_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $y_4 \in \mathbb{R}$

Δηλ. $\{$μια βάση του $N(A^T)\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

γ) Έστω $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Έχουμε: $A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow U\vec{x} = \vec{c}$

όπου $\vec{c}$ το διάνυσμα που προκύπτει εφαρμόζοντας τα ίδια στάδια απαλοιφής που χρησιμοποιήσαμε για να «πάμε» από τον A στον U.

Άρα, έχουμε:

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2) & 1 & 5 \\ (+) & & \\ & (+) & \\ & & (+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 + b_1 \\ b_4 + 5b_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 & 5 \\ (+) & \\ & (+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 + 3b_2 - 5b_1 \\ b_4 + 5b_2 - 5b_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ (+) \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 + 2b_2 - 5b_1 \\ b_4 - b_3 + 2b_2 \end{bmatrix} = \vec{c}$$

Άρα: $U\vec{x} = \vec{c} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 + 2b_2 - 5b_1 \\ b_4 - b_3 + 2b_2 \end{bmatrix}$, στο οποίο η τελευταία εξίσωση είναι: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = b_4 - b_3 + 2b_2$

Άρα, το $A\vec{x} = \vec{b}$ έχει λύση ανν $b_4 - b_3 + 2b_2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b_4 = b_3 - 2b_2$

Άρα, για $\vec{b}$ της μορφής: $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_3 - 2b_2 \end{bmatrix}$, με $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$

[πλήθος ελεύθερων μεταβλητών] $= n - r(A) = 3 - 3 = 0$, και άρα η λύση θα είναι μοναδική.