ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ -ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Θέματα εξέτασης προόδου στο μάθημα «Γραμμική Άλγεβρα & Αναλυτική Γεωμετρία» (ΕΜ111)

Ηράκλειο, 23 Νοεμβρίου 2008

Θέμα 1. (μονάδες 2.7)

Έστω το σύστημα εξισώσεων: $\left.\begin{aligned} u+2v-3w&=2\\ 2u+6v-5w&=5\\ -3u-8v+(\lambda^2+7)w&=\lambda-8\end{aligned}\right\}$, με αγνώστους $u,v,w\in\mathbb{R}$ και με $\lambda\in\mathbb{R}$ γνωστή παράμετρο.

α) [*μονάδες: 0.7*] Για ποια τιμή (ή ποιες τιμές) του λ το σύστημα δεν έχει λύση;

β) [*μονάδες: 1.0*] Για ποια τιμή (ή ποιες τιμές) του λ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις; Ποια η γενική μορφή αυτών των λύσεων;

γ) [*μονάδες: 1.0*] Για ποιες τιμές του λ το σύστημα έχει μοναδική λύση; Υπολογίστε τη λύση αυτή συναρτήσει της παραμέτρου λ.

Θέμα 2. (μονάδες 1.8)

α) [*μονάδες: 1.2*] Χρησιμοποιήστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss-Jordan για να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -10 & 4\\ 6 & -15 & 6\\ -3 & -5 & 0\end{bmatrix}$$

β) [*μονάδες: 0.6*] Βρείτε τη λύση του συστήματος $A\vec{x}=\vec{b}$, όπου $\vec{b}=(-1,4,3)$.

Θέμα 3. (μονάδες 3.6)

Έστω *V* είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα:

$$\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\qquad \vec{v}_2=\begin{bmatrix}3\\-5\\2\end{bmatrix},\qquad \vec{v}_3=\begin{bmatrix}-1\\3\\-2\end{bmatrix}$$

α) [*μονάδες: 1.0*] Να βρεθεί η διάσταση και μια βάση του *V*.

β) [*μονάδες: 1.0*] Εξετάστε αν το διάνυσμα $\vec{v}=(2,3,-4)$ ανήκει στο *V*.

γ) [*μονάδες: 0.6*] Να βρεθεί ένας πίνακας *B* που έχει τον *V* ως χώρο γραμμών

δ) [*μονάδες: 1.0*] Να βρεθεί ένας πίνακας *C* που έχει τον *V* ως μηδενόχωρο.

Θέμα 4. (μονάδες 1.9)

Έστω ο πίνακας: $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & -3 & -1\\ -1 & 4 & 3\\ -5 & 10 & 5\end{bmatrix}$.

α) [*μονάδες: 1.0*]. Βρείτε την παραγοντοποίηση LU σε κάτω τριγωνικό πίνακα *L* (με 1 σε όλη την κύρια διαγώνιο) και σε πίνακα *U* με κλιμακωτή μορφή, και προσδιορίστε την τάξη του *A*.

β) [*μονάδες: 0.9*]. Προσδιορίστε τις βασικές και τις ελεύθερες μεταβλητές του συστήματος $A\vec{x}=\vec{0}$ και βρείτε τη γενική του λύση.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ & ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ (ΝΟΕ 2008)

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1

α) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & 5 \\ -3 & -8 & \lambda^2+7 & \lambda-8 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-2) \quad 3 \\ \leftarrow (+) \\ \leftarrow (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & \lambda^2-2 & \lambda-2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ 1 \\ \leftarrow (+) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & \lambda-1 \end{array}\right] \qquad (1)$$

Το σύστημα δεν έχει πλήρες σύνολο μη-μηδενικών οδηγών ανν $\lambda^2-1=0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=1 \\ \text{ή} \\ \lambda=-1 \end{cases}$

Για $\lambda=-1$, η τελευταία εξίσωση στην (1) γίνεται:

$0u+0v+0w=-2$ και άρα το σύστημα δεν έχει λύση

β) Για $\lambda=1$, η τελευταία εξίσωση στην (1) είναι:

$0u+0v+0w=0$, που ισχύει $\forall\ u,v,w \in \mathbb{R}$

Η 2η εξίσωση είναι: $2v+w=1 \Leftrightarrow 2v=1-w \Leftrightarrow v=\frac{1}{2}-\frac{w}{2}$

και η 1η εξίσωση είναι: $u+2v-3w=2 \Leftrightarrow u=2-2v+3w \Rightarrow$

$\Rightarrow u=2-1+w+3w \Rightarrow u=1+4w$

Δηλ. για $\lambda=1$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της

μορφής: $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4w \\ \frac{1}{2}-\frac{w}{2} \\ w \end{bmatrix}$ ή ισοδύναμα: $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 4 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

γ) Για $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$ το σύστημα έχει πλήρες σύνολο μη-μηδενικών οδηγών. Άρα, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R} - \{1,-1\}$ το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Σ' αυτήν την περίπτωση, με ανάδρομη αντικατάσταση, προκύπτει:

3η εξίσωση: $(\lambda^2-1)w = \lambda - 1 \Leftrightarrow w = \dfrac{\lambda-1}{(\lambda-1)(\lambda+1)} \Leftrightarrow w = \dfrac{1}{\lambda+1}$

2η εξίσωση: $2v + w = 1 \Leftrightarrow 2v = 1 - w \Leftrightarrow 2v = 1 - \dfrac{1}{\lambda+1} \Leftrightarrow 2v = \dfrac{\lambda}{\lambda+1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow v = \frac{\lambda}{2(\lambda+1)}$$

1η εξίσωση: $u + 2v - 3w = 2 \Leftrightarrow u = 2 - 2v + 3w \Rightarrow u = 2 - 1 + w + 3w \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow u = 1 + 4w \Rightarrow u = 1 + \frac{4}{\lambda+1} \Leftrightarrow u = \frac{\lambda+5}{\lambda+1}$$

Δηλ. για $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$, το σύστημα έχει τη μοναδική λύση:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda+5}{\lambda+1} \\ \frac{\lambda}{2(\lambda+1)} \\ \frac{1}{\lambda+1} \end{bmatrix} \quad \text{δηλ.} \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda+1} \begin{bmatrix} \lambda+5 \\ \frac{\lambda}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

ΘΕΜΑ 2

α)
$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -10 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -15 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} (-2)\ \ 1 \\ (+) \\ \qquad (+) \end{array} \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -10 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ 3 \\ (+) \end{array} \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -10 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} (+) \\ (+) \\ (-1)\ \ 2 \end{array} \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -10 & 0 & -9 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l} \hookleftarrow(+) \\ 2 \\ \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} /3 \\ /5 \\ /(-2) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/5 & -2/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 & -3/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

Άρα: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2/3 & 0 \\ 3/5 & -2/5 & -1/5 \\ 5/2 & -3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

β) Αφού $\exists$ ο A^{-1} το σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ έχει τη μοναδική λύση $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

δηλ. $\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2/3 & 0 \\ 3/5 & -2/5 & -1/5 \\ 5/2 & -3/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{8}{3} \\ -\frac{3}{5} - \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \\ -\frac{5}{2} - \frac{12}{2} - \frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 11/3 \\ -14/5 \\ -10 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ 3}}$

α) Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ δηλ. $V = R(A)$

Έχουμε: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{array}{l} 1 \\ \hookleftarrow(+) \\ \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ 1 \\ \hookleftarrow(+) \end{array} \longrightarrow$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Άρα: $\dim V = \dim R(A) = r(A) =$ [πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του U] $= 2$

και {μια βάση του V} = {μια βάση του $R(A)$} = {στήλες του A που αντιστοιχούν στις στήλες του U που έχουν τους οδηγούς} = {1η, 2η στήλη του A}

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

β) Το $\vec{v} = (2, 3, -4)$ ανήκει στο V ανν $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Έχουμε: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{1\,(+)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{1\,(+)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

η τελευταία γραμμή δίνει: $0\lambda_1 + 0\lambda_2 = 1$, άρα το σύστημα δεν έχει λύση (δηλ. $\nexists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ με την παραπάνω ιδιότητα).

Επομένως, $\vec{v} \notin V$

γ) Θέλουμε $V = R(B^T) \Leftrightarrow R(A) = R(B^T)$

Αρκεί ο B^T να έχει στήλες που προκύπτουν ως γραμμικοί συνδυασμοί της βάσης του V (δηλ. της βάσης του $R(A)$).

π.χ. $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & -5 & -6 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \\ 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

δ) Θέλουμε $N(C) = V \Leftrightarrow N(C) = R(A)$. Άρα κάθε $\vec{x} \in N(C)$ μπορεί να γραφτεί ως $\vec{x} = \lambda_1 \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix}3\\-5\\2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1+3\lambda_2\\-\lambda_1-5\lambda_2\\2\lambda_2\end{bmatrix}$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$

Επειδή $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$ και θέλουμε $C\vec{x}=\vec{0}$, ο πίνακας C θα έχει $n=3$ (τρεις στήλες). Επιπλέον, $\dim N(C) = \dim V = 2 \Rightarrow n - r(C) = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3 - r(C) = 2 \Rightarrow r(C) = 1 \Rightarrow \dim R(C^T) = 1$. Δηλαδή, οι γραμμές του C θα είναι πολλαπλάσια <u>ενός</u> διανύσματος του $\mathbb{R}^3$. Άρα αν $[\alpha\ \ \beta\ \ \gamma]$ μια οποιαδήποτε γραμμή του C, θα πρέπει:

$$[\alpha\ \ \beta\ \ \gamma]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = 0, \text{ δηλ. } [\alpha\ \ \beta\ \ \gamma]\begin{bmatrix}\lambda_1+3\lambda_2\\-\lambda_1-5\lambda_2\\2\lambda_2\end{bmatrix} \quad \forall\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\lambda_1+3\lambda_2) + \beta(-\lambda_1-5\lambda_2) + \gamma 2\lambda_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1(\alpha-\beta) + \lambda_2(3\alpha-5\beta+2\gamma) = 0, \quad \forall\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$$

Άρα: $\begin{cases}\alpha-\beta=0\\ 3\alpha-5\beta+2\gamma=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=\alpha\\ -2\alpha+2\gamma=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=\alpha\\ \gamma=\alpha\end{cases}$

Επομένως, κάθε γραμμή του C θα είναι της μορφής $[\alpha\ \ \alpha\ \ \alpha]$ με $\alpha\in\mathbb{R}$, και επειδή $\dim R(C^T)=1$ θα πρέπει τουλάχιστον μία να είναι $\neq \vec{0}^T$

π.χ. $C = \begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\2&2&2\end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix}5&5&5\\-3&-3&-3\end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix}4&4&4\\0&0&0\\-3&-3&-3\\7&7&7\end{bmatrix}$ κλπ

ΘΕΜΑ 4

$$\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\ *&1&0&0\\ *&*&1&0\\ *&*&*&1\end{array}\right] \Bigg| \left[\begin{array}{ccc}1&-1&0\\2&-3&-1\\-1&4&3\\-5&10&5\end{array}\right] \begin{array}{c}(-2)\quad 1\quad 5\\ (+)\\ (+)\\ (+)\end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & * & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ -5 & * & * & 1 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right] \begin{matrix} 3 \quad 5 \\ (+) \\ (+) \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & * & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Άρα: $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$r(A) = [$πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U] \Leftrightarrow r(A) = 2$

β) $A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Βασικές μεταβλητές: x_1, x_2 (αντιστοιχούν σε στήλες με οδηγούς)
Ελεύθερες >> : x_3 (αντιστοιχεί στη στήλη χωρίς οδηγό)

$$\left.\begin{array}{l} \text{2η εξίσωση: } -x_2 - x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -x_3 \\ \text{1η εξίσωση: } x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = -x_3 \\ x_1 = -x_3 \end{array}\right.$$

Άρα, γενική λύση του $A\vec{x} = \vec{0}$ είναι η:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{με } x_3 \in \mathbb{R}$$