ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ -ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

<u>Θέματα εξέτασης στο μάθημα «Γραμμική Άλγεβρα & Αναλυτική Γεωμετρία» (ΕΜ111)</u>

Ηράκλειο, 16 Ιανουαρίου 2009

<u>Θέμα 1. (μονάδες 2)</u>

Έστω το σύστημα $\begin{cases} x+y+\lambda z=2 \\ 3x+4y+2z=\lambda \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$, με αγνώστους $x,y,z\in\mathbb{R}$ και με γνωστή παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) [*μονάδες: 0.8*] Για ποιες τιμές του λ το σύστημα έχει μοναδική λύση; Υπολογίστε τη λύση αυτή συναρτήσει της παραμέτρου λ. Τι συμπέρασμα βγάζετε για τη λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος;

β) [*μονάδες: 1.0*] Για ποια τιμή (ή ποιες τιμές) του λ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις; Ποια η γενική μορφή αυτών των λύσεων; Τι συμπέρασμα βγάζετε για τη λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος;

γ) [*μονάδες: 0.2*] Για ποια τιμή (ή ποιες τιμές) του λ το σύστημα δεν έχει λύση;

<u>Θέμα 2. (μονάδες 2)</u>

α) [*μονάδες: 1.0*] Δείξτε ότι υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα $A=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ και υπολογίστε τον.

β) [*μονάδες: 0.5*] Έστω ότι ο παραπάνω πίνακας A είναι ένας πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B}\mapsto\mathbb{E}$, όπου $\mathbb{E}=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Ποια είναι τα διανύσματα της βάσης $\mathbb{B}$;

γ) [*μονάδες: 0.2*] Ποιος είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{E}\mapsto\mathbb{B}$.

δ) [*μονάδες: 0.3*] Έστω το διάνυσμα $\vec{v}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2+3\vec{e}_3$. Ποιες οι συντεταγμένες του ως προς τη βάση $\mathbb{B}$;

<u>Θέμα 3. (μονάδες 2)</u>

Έστω οι πραγματικοί διανυσματικοί υπόχωροι $V=\{(x,y,z) \setminus x+2y=0,\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$ και $W=\{(x,y,z) \setminus x-y+z=0,\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$ του $\mathbb{R}^3$.

α) [*μονάδες: 0.5*]. Τι παριστάνουν γεωμετρικά οι χώροι *V* και *W* και ποια η διάσταση του καθενός;

β) [*μονάδες: 0.8*]. Βρείτε μια βάση του υποχώρου $V\cap W$ και τη διάσταση του αθροίσματος $V+W$.

γ) [*μονάδες: 0.7*]. Βρείτε μια βάση του υποχώρου του $\mathbb{R}^3$ που είναι συμπληρωματικός του $V\cap W$.

<u>Θέμα 4. (μονάδες 2)</u>

Έστω $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται από τη σχέση:

$$f(x,y,z)=\left(-2y+z,\ x-y,\ 3x-5y+z,\ 2x+2y-2z\right),\quad \forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

α) [*μονάδες: 0.5*] Βρείτε τον πίνακα *A* της απεικόνισης *f* ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^4$.

β) [*μονάδες: 0.9*] Να βρεθούν οι διαστάσεις και βάσεις των $\ker f$ και $\operatorname{Im} f$.

γ) [*μονάδες: 0.3*] Είναι η απεικόνιση "επί";

δ) [*μονάδες: 0.3*] Είναι η απεικόνιση "1-1";

<u>Θέμα 5. (μονάδες 2)</u>

α) [*μονάδες: 0.6*] Έστω ο πίνακας $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ με $A=\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Να βρεθούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(\lambda)$ και οι ιδιοτιμές του *A*.

β) [*μονάδες: 0.9*] Δείξτε ότι ο *A* διαγωνιοποιείται και βρείτε ένα πίνακα *P* που τον διαγωνιοποιεί, καθώς και τον αντίστοιχο διαγώνιο *D*.

γ) [*μονάδες: 0.5*] Ποια είναι η τιμή της ορίζουσας του πίνακα $B=PA^{20}P^{-1}$;

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ & ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (ΤΕΜ-111)
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

ΘΕΜΑ 1

α) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 3 & 4 & 2 & \lambda \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-3)\ (-2) \\ \leftarrow (+) \\ \leftarrow (+) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & 2-3\lambda & \lambda-6 \\ 0 & 1 & -1-2\lambda & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (-1) \\ \leftarrow (+) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & 2-3\lambda & \lambda-6 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 3-\lambda \end{array}\right] \qquad (1)$$

Το σύστημα έχει πλήρες σύνολο μη-μηδενικών οδηγών και άρα μοναδική λύση αν και μόνο αν $\lambda-3\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 3$.
Σ' αυτήν την περίπτωση με ανάδρομη αντικατάσταση προκύπτει:

3η εξίσωση: $(\lambda-3)z = 3-\lambda \Leftrightarrow z=-1$

2η εξίσωση: $y+(2-3\lambda)z = \lambda-6 \Leftrightarrow y=\lambda-6+(3\lambda-2)z \Rightarrow$
$\Rightarrow y = \lambda-6+2-3\lambda \Leftrightarrow y=-2(\lambda+2)$

1η εξίσωση: $x+y+\lambda z = 2 \Leftrightarrow x=-y-\lambda z+2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 2\lambda+4+\lambda+2 \Leftrightarrow x = 3\lambda+6$

Άρα: $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\lambda+6 \\ -2(\lambda+2) \\ -1 \end{bmatrix}$$

Το αντίστοιχο ομογενές σύστημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική, δηλ. $(x,y,z)=(0,0,0)$.

β) Για $\lambda=3$, η τελευταία εξίσωση στην (1) δίνει:
$0x+0y+0z=0$, που ισχύει $\forall\ x,y,z\in\mathbb{R}$

2η εξίσωση: $y-7z=-3 \Leftrightarrow y=7z-3$

1η εξίσωση: $x+y+3z=2 \Leftrightarrow x=-y-3z+2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=-7z+3-3z+2 \Leftrightarrow x=-10z+5$

Δηλ. για $\lambda=3$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10z+5 \\ 7z-3 \\ z \end{bmatrix} \quad \text{δηλ.} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{x}_{\varepsilon\iota\delta.}} + z\underbrace{\begin{bmatrix} -10 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{x}_0}$$

Από τη μορφή αυτή συμπεραίνουμε ότι το αντίστοιχο ομογενές σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} -10 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$

γ) Από την (1) προκύπτει ότι το σύστημα είναι ιδιόμορφο ανν $\lambda=3$, το οποίο, όπως είδαμε, δίνει άπειρες λύσεις. Άρα δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω. το σύστημα να μην έχει λύση.

ΘΕΜΑ 2

α) $\det A = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2(-1)-2=-4 \neq 0$

δηλ. $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ {ο A είναι αντιστρέψιμος}

Για να υπολογίσουμε τον A^{-1} εφαρμόζουμε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{εναλλαγή} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-3) \\ \\ (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (-1) \\ (+) \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{ll} & (+) \\ (+) & \\ 1/2 & 1/2 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -2 & 0 & 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (+) \\ 1 \\ \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot(-1/2) \\ \cdot(-1/2) \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

Άρα: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

β) Αφού ο Α είναι πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}$, θα έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$ (της βάσης $\mathbb{B}$) ως προς την $\mathbb{E}$. Άρα, τα διανύσματα της $\mathbb{B}$ είναι τα εξής:

$\vec{b_1} = \vec{e_2} + 3\vec{e_3}$, $\vec{b_2} = -2\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + 4\vec{e_3}$, $\vec{b_3} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + 2\vec{e_3}$

γ) Ο πίνακας αλλαγής βάσης $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$ θα είναι ο A^{-1} που υπολογίστηκε στο ερώτημα (α).

δ) Οι συντεταγμένες του $\vec{v}$ ως προς τη $\mathbb{B}$ υπολογίζονται ως εξής:

$$A^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

δηλ. $\vec{v} = 5\vec{b_1} - 2\vec{b_2} - 2\vec{b_3}$

ΘΕΜΑ 3

α) Ο V είναι το <u>επίπεδο</u> στο χώρο $\mathbb{R}^3$ με εξίσωση $x+2y=0$, δηλ., το επίπεδο που ορίζεται από τον άξονα Oz και την ευθεία $x=-2y$ του επιπέδου Oxy.

Ο W είναι το <u>επίπεδο</u> στο χώρο $\mathbb{R}^3$ με εξίσωση $x-y+z=0$ δηλ., το επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία $x=y$ του επιπέδου Oxy και την ευθεία $x=-z$ του επιπέδου Oxz.

Άρα: $\dim V = 2$ και $\dim W = 2$

β) $V \cap W = \{(x,y,z) \setminus x+2y=0 \text{ και } x-y+z=0,\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$

δηλ. ο $V\cap W$ αποτελείται από τις λύσεις του συστήματος:

$$\left.\begin{aligned} x-y+z&=0\\ x+2y\quad&=0\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

δηλ. ο $V\cap W$ είναι ο μηδενόχωρος του πίνακα $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$

Έχουμε: $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\end{array}\right]\begin{array}{l}(-1)\\ \leftarrow(+)\end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 0\end{array}\right]$

Άρα: $\begin{cases} 3y-z=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}z\\ x-y+z=0 \Leftrightarrow x=y-z \Rightarrow x=\frac{1}{3}z-z \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}z\end{cases}$

δηλ. $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = z\begin{bmatrix}-2/3\\1/3\\1\end{bmatrix}$

Άρα, μια βάση του $V\cap W$ είναι το μονοσύνολο $\{(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1)\}$

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V\cap W) = 2+2-1=3$$

γ) Αφού $V\cap W = N(A)$, τότε ο συμπληρωματικός του $V\cap W$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ είναι ο $R(A^T)$. Από την παραπάνω απαλοιφή προκύπτει ότι μια βάση του $R(A^T)$ είναι η $\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\-1\end{bmatrix}\right\}$

ΘΕΜΑ 4

α) Ο πίνακας της f ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^4$ έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των $f(1,0,0)$, $f(0,1,0)$ και $f(0,0,1)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0,0)=(0,1,3,2) \\ f(0,1,0)=(-2,-1,-5,2) \\ f(0,0,1)=(1,0,1,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

β)
$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \text{εναλλαγή} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} (-3)\ (-2)\ (+) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} (-1)\ 2\ (+) \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

$\dim(\mathrm{Im} f) = \dim R(A) = r(A) = [\text{πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του } U] = 2$

$\dim(\ker f) = \dim N(A) = n - r(A) = 3-2 = 1$

{μια βάση του $\mathrm{Im} f$} = {μια βάση του $R(A)$} = {στήλες του A που αντιστοιχούν στις στήλες του U με οδηγούς} = {1η, 2η στήλη του A} =

$$=\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Επίσης, $A\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -2y+z=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}z \\ x-y=0 \Leftrightarrow x=y \Rightarrow x=\frac{1}{2}z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}$$

$$\{\text{μια βάση του } \ker f\} = \{\text{μια βάση του } N(A)\} = \left\{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

γ) $r(A)=2<m=4$, άρα η f δεν είναι "επί"
(ή αλλιώς $\dim(\mathrm{Im} f)=2<\dim \mathbb{R}^4=4$)

δ) $r(A)=2<n=3$, άρα η f δεν είναι "1-1"
(ή αλλιώς $\ker f \neq \{\vec{0}\}$)

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ 5}}$

α) $$X_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(3-\lambda)+4 =$$

$$=\lambda^2-\lambda-2 \quad (\text{χαρακτηριστικό πολυώνυμο του } A)$$

$$X_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow \lambda=\frac{1\pm 3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda=2 \\ \lambda=-1 \end{array}\right\} \text{ιδιοτιμές του } A$$

β) Ο πίνακας A είναι 2×2 και έχει <u>δύο</u> διαφορετικές ιδιοτιμές, και άρα διαγωνιοποιείται.
Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=2$ έχουμε: $(A-\lambda_1 I)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -4x_1-4x_2=0 \Leftrightarrow x_1=-x_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

Επομένως: $\{$μια βάση του $V_2(A)\} = \mathbb{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$, έχουμε: $(A - \lambda_2 I)\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -X_1 - 4X_2 = 0 \Leftrightarrow X_1 = -4X_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} =$$

$$= X_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_2 \in \mathbb{R}$$

Επομένως: $\{$μια βάση του $V_{-1}(A)\} = \mathbb{B}_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Ο πίνακας $P = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (με στήλες τα διανύσματα του συνόλου $\mathbb{B} = \mathbb{B}_2 \cup \mathbb{B}_{-1}$) διαγωνιοποιεί τον A. Ο αντίστοιχος διαγώνιος πίνακας που είναι όμοιος με τον A μέσω της σχέσης $D = P^{-1}AP$ είναι ο $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

γ) $\det B = \det(PA^{20}P^{-1}) = (\det P)(\det A^{20})(\det P^{-1}) =$

$$= (\det A)^{20} = [X_A(0)]^{20} = (-2)^{20}$$