



Πέμπτη 7 Μαρτίου 2024

Σ. Φίλιππας

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Φυλλάδιο 4

1). Δείξτε ότι η παρακάτω εξίσωση είναι παραβολικού τύπου και στη συνέχεια γράψτε την σε κανονική μορφή

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} + u_x - u_y + 2u = 0,$$

όπου $u = u(x, y)$.

2). Γράψτε την παρακάτω διαφορική εξίσωση σε κανονική μορφή

$$u_{xx}(x, y) + (1 + y^2)^2 u_{yy}(x, y) + 2y(1 + y^2) u_y(x, y) = 0.$$

3). Δίνεται η Διαφορική εξίσωση για την $u = u(x, y)$,

$$4y^2 u_{xx} + 2(1 - y^2) u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1 + y^2} (2u_x - u_y) = 0.$$

(α) Να βρεθεί η κανονική μορφή της διαφορικής εξίσωσης.

(β) Να βρεθεί η γενική μορφή της λύσης της εξίσωσης.

(γ) Να βρεθεί η λύση $u(x, y)$ της εξίσωσης που ικανοποιεί

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_y(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

όπου $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ είναι δοθείσες ομαλές συναρτήσεις.

(Απ.: Η αλλαγή μεταβλητών είναι $\xi = x + 2y$, $\eta = x - \frac{2}{3}y^3$ και η κανονική μορφή $w_{\xi\eta} = 0$.)