



Πέμπτη 29 Φεβρουαρίου 2024

Σ. Φίλιππας

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Φυλλάδιο 3

1). Δίδεται η εξίσωση

$$u_t(x, t) + u(x, t)u_x(x, t) = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0,$$

με αρχικά δεδομένα

$$u(x, 0) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Σχεδιάστε τις χαρακτηριστικές και παρατηρήστε ότι δεν υπάρχει κλασική λύση. Στη συνέχεια αναζητήστε ασθενή λύση (που περιγράφει κρουστικό κύμα) κάνοντας χρήση της συνθήκης Rankine–Hugoniot. Βρείτε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος. Σχεδιάστε τη λύση $u(x, t)$ για $t = 0, 3, 8$.

2). Δίδεται η εξίσωση

$$u_{xx} + 4u_{xy} + u_x = 0.$$

όπου $u = u(x, y)$.

(i) Δείξτε ότι είναι υπερβολικού τύπου.

(ii) Βρείτε κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών και γράψτε την εξίσωση σε κανονική μορφή. (Απ. Η αλλαγή μεταβλητών είναι $\xi = -4x + y$, $\eta = y$.)

(iii) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι $u(x, 8x) = 0$ και $u_x(x, 8x) = 4e^{-2x}$, βρείτε τη λύση. (Απ. $u(x, y) = (4x - \frac{y}{2})e^{-\frac{y}{4}}$.)