



Πέμπτη 22 Φεβρουαρίου 2024

Σ. Φίλιππας

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Φυλλάδιο 2

1). Δίδεται η εξίσωση

$$\begin{aligned}u(x, t)u_x(x, t) + u_y(x, t) &= 1, & x \in \mathbf{R}, & y \in \mathbf{R}, \\u(x, x) &= \frac{1}{2}x, & x \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

(a) Ελέγξτε κατά πόσον οι χαρακτηριστικές της εξίσωσης τέμνουν εγκάρσια την καμπύλη των δεδομένων, δηλ. την ευθεία $y = x$.

(b) Βρείτε τη λύση. (Απ. $u(x, t) = \frac{\frac{1}{2}y^2 + x - 2y}{y - 2}$).

2). (Άσκηση Ανάλυσης) Έστω $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\inf_{x, y \in \mathbf{R}} \frac{1}{y - x} \int_x^y f(x) dx = \inf_{x \in \mathbf{R}} f(x).$$

3). Δίδεται η εξίσωση

$$\begin{aligned}u_t(x, t) + u(x, t)u_x(x, t) &= 0, & x \in \mathbf{R}, & t > 0, \\u(x, 0) &= ax + b, & a, b \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Βρείτε την κλασική λύση $u(x, t)$ καθώς και τον μέγιστο χρόνο ύπαρξης T_{max} . Εξειδικεύσετε στις περιπτώσεις $a = 1, b = 0$ ή $a = -1, b = 0$, όπου επι πλέον σχεδιάστε τις χαρακτηριστικές.