ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 18 Απριλίου 2024

Σ. Φίλιππας

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Φυλλάδιο 10

1). Η $f \in C^2(R)$ είναι 2π–περιοδική συνάρτηση που ικανοποιεί

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)dx.$$

Για ποιές συναρτήσεις f η παραπάνω ανισότητα γίνεται ισότητα;

Υποδ.: Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα του Parceval.

2). Έστω a, $b \geq 0$ και $k > 0$. Δείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων της παρακάτω εξίσωσης.

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= F(x,t), \qquad 0 < x < L, \qquad t > 0, \\ u(0,t) + au_x(0,t) = h(t), \qquad u(L,t) + bu_x(L,t) &= g(t), \qquad t \geq 0, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0 < x < L. \end{aligned}$$

3). Η $u = u(x,t)$ είναι κλασική λύση της

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= x(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0, \qquad t > 0, \end{aligned}$$

και συνεχής στο $R = [0,1] \times [0,\infty)$.

(i) Δείξτε οτι η u είναι μη αρνητική.

(ii) Βρείτε θετικούς αριθμούς a, b τ.ω.

$$u(x,t) \leq ax(1-x)e^{-bt}.$$

(iii) Δείξτε οτι $u(x,t) \to 0$ ομοιόμορφα στο $[0,L]$ καθώς $t \to +\infty$.

4). Έστω $U \subset \mathbf{R}^2$ φραγμένο χωρίο, και $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ λύση της εξίσωσης

$$\begin{aligned} \Delta u &= u^3 - u, \quad \text{στο} \;\; U, \\ u &= 0, \qquad\quad \text{στο} \;\; \partial U. \end{aligned}$$

Δείξτε ότι $|u| \leq 1$.